Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра экономико-математических методов и статистики

519.8(07)
Л272

А.Т. ЛАТИПОВА

Применение линейного программирования в исследовании социально-экономических процессов

Учебное пособие

Под редакцией А. В. Панюкова

Челябинск

Издательский центр ЮУрГУ

2010

УДК 519.852(075.8)
Л172

Одобрено
учебно-методической комиссией факультета экономики и управления

Рецензенты: Л.С. Сосненко, А.Н. Тырсин

Латипова, А.Т.
Л172 Применение линейного программирования в исследовании социально-экономических процессов: учебное пособие / А.Т. Латипова; под редакцией А.В. Панюкова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 123 с.

В данном учебном пособии рассматриваются примеры построения математических моделей различных ситуаций в экономике с применением линейного программирования, а также методы нахождения решения поставленных задач. Рассмотрены такие темы, как: особенности моделирования экономических систем, постановка задачи линейного программирования, графический метод решения задачи линейного программирования, теория двойственности, симплекс-метод, применение надстройки «Поиск решения» MS Excel. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством решенных примеров. Приведено большое количество разнообразных экономических задач для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов, обучающихся по экономическим направлениям, а также для преподавателей экономических направлений.

УДК 519.852(075.8)

Оглавление

Введение 4
1. Формализация проблем экономики в виде задач линейного программирования 5
1.1. Задача планирования по валу 5
1.2. Задача планирования комплектации 7
1.3. Транспортная задача 9
1.4. Сетевая транспортная задача. Задача об оптимальном потоке 13
1.5. Сетевая задача о максимальном потоке 17
1.6. Задача о клиринге 20
1.7. Формы представления задач ЛП 22
1.8. Геометрический (графический) метод решения задач линейного программирования 26
2. Двойственность в линейном программировании 36
2.1. Задача формирования равновесных цен на ресурсы 36
2.2. Отношение двойственности для задач ЛП 38
2.3. Составление двойственной задачи 40
2.4. Теорема о дополняющей нежесткости (Вторая теорема двойственности) 42
2.5. Экономическая интерпретация двойственной задачи 47
3. Прямые методы решения задач линейного программирования 49
3.1. Симплекс-метод 49
3.2. Метод искусственного базиса 54
3.3. Модифицированный симплекс-метод (метод обратной матрицы)...... 60
3.4. Модифицированный симплекс-алгоритм. 61
4. Инструментальные средства решения задач линейного программирования 62
4.1. Применение надстройки «Поиск решения» 63
5. Задачи для самостоятельного решения 75
5.1. Общие задачи 75
5.2. Индивидуальные задачи 81
Библиографический список 123

Введение

Математическое моделирование позволяет наиболее последовательно и глубоко анализировать сложные системы, в том числе и экономики. Оно позволяет определить и зафиксировать цели и типы решений, обеспечивает структуру для целостного, логического анализа; дает возможность автоматизировать процесс принятия решений. Количественные модели позволяют более целостно и подробно оценивать и интерпретировать данные, чем другие модели. Поэтому экономико-математическое моделирование является неотъемлемой частью любого исследования в области экономики. Ввиду сложности экономики для ее модельного описания применяются различные подходы, каждый из которых реализуется множеством моделей.

В данном учебном пособии рассматриваются примеры построения математических моделей различных ситуаций в экономике, а также методы нахождения решения поставленных задач. Из большого множества разнообразных математических моделей выбраны линейные, так как линейные модели являются относительно простыми для изучения, но в то же время позволяют понять основные идеи и особенности применяемых методов. К тому же только для линейных моделей разработаны устойчивые эффективные алгоритмы нахождения оптимального решения.

В пособии рассматриваются следующие темы: особенности моделирования экономических систем, постановка задачи линейного программирования, графический метод решения задачи линейного программирования, применение надстройки Поиск решения MS Excel и теория двойственности. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством разобранных примеров. Кроме того, приведено большое количество разнообразных экономических задач.

Учебное пособие написано на основе лекций, прочитанных автором для студентов факультета экономики и управления Южно-Уральского госуниверситета. Его содержание соответствует утвержденной программе курса «Математические методы исследования экономики» для студентов экономических специальностей: «Мировая экономика», «Экономическая теория», «Национальная экономика», «Государственное и муниципальное управление».

1. Формализация проблем экономики в виде задач линейного программирования

В математическом моделировании экономики широко применяется линейное программирование (ЛП). Это связано с тем, что для задач ЛП в отличие от многих других задач разработаны высокоэффективные алгоритмы. Поэтому ЛП можно назвать «маленьким островком» определенности в «океане» задач моделирования.

В ЛП решаются оптимизационные задачи с линейной целевой функцией и линейной системой ограничений. На алгоритмах ЛП (в силу их эффективности) базируются оптимизационные алгоритмы более сложных типов моделей (например, целочисленное, нелинейное и стохастическое программирование).

Рассмотрим далее постановки некоторых экономических задач.

1.1. Задача планирования по валу

Для производства m видов продукции предприятие использует n видов ресурсов, запасы которых составляют $b_1, b_2, ..., b_n$. Прибыль от реализации одной единицы продукции j-го вида равна c_j, $j = (\overline{1,m})$. Затраты i-того ресурса для выпуска одной единицы продукции j-го вида равны a_{ij}. Числа a_{ij} называются технологическими коэффициентами; они образуют технологическую матрицу $A = \{a_{ij}\}$. Необходимо найти план производства продукции, при котором общая прибыль от реализации выпущенной продукции будет наибольшей.

Обозначим через x_j – число единиц продукции j-го вида, запланированных к производству $j = 1, 2, \ldots, m$. По смыслу задачи объем выпуска не может быть отрицательным, поэтому $(\forall j = 1, 2, \ldots, m)\left(x_j \geq 0\right)$. Величина $a_{ij}x_j$ показывает, сколько единиц i-го ресурса, необходимо для выпуска x_j единиц j-го продукта. Для реализации плана потребуется $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m$ единиц первого ресурса, запасы которого составляют b_1 единиц. Потребление ресурса не может превосходить запаса, поэтому получаем ресурсное ограничение следующего вида.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \leq b_1.$$

Аналогично составляются ограничения на использование остальных ресурсов

$$\left(\forall i = 1, 2, \ldots, n\right)\left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m \le b_i\right).$$

Целевой функцией является общая прибыль от продажи. Прибыль от реализации j-го вида продукции равна $c_j x_j$. Отсюда общая прибыль равна

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m.$$

Таким образом, математическая модель задачи планирования по валу записывается так

$$Z(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \le b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \le b_n, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_m \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

1.1.1. *Пример*

Мебельный цех производит два вида продукции: столы и шкафы. Ежемесячно в цех поставляется 100 м^3 сосны и 120 м^3 липы. При этом на изготовление одного стола затрачивается 0,1 м^3 сосны и 0,05 м^3 липы. Расход материалов на производство одного шкафа составляет 0,02 м^3 сосны и 0,15 м^3 липы. Изучение рынка сбыта показало, что спрос на шкафы не превышает 700 штук в месяц. Прибыль от реализации одного стола составляет 750 ден. ед., а шкафа 1200 ден. ед. Составить задачу линейного программирования с критерием получения наибольшей прибыли.

Решение

Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество столов и шкафов (в штуках), выпускаемых мебельным цехом в месяц. Критерием (целевой функцией) является максимум прибыли. Прибыль от реализации x_1 шт. столов составляет $750x_1$ ден. ед., а от реализации x_2 шт. шкафов – $1200x_2$ ден. ед. Общая сумма прибыли за месяц составит $(750x_1 + 1200x_2)$ ден. ед. Таким образом, суммарную прибыль за месяц можно выразить как $Z = 750x_1 + 1200x_2$.

По смыслу задачи обе переменные неотрицательные: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Расход сосны на изготовление x_1 шт. столов составит $0{,}1x_1$ м^3, а на изготовление шкафов – $0{,}02x_2$ м^3. Таким образом, общий расход сосны будет равен $(0{,}1x_1 + 0{,}02x_2)$ м^3. Так как запасы сосны конечны (100 м^3), то получим следующее неравенство $0,1x_1 + 0,02x_2 \le 100$. Аналогично, анализируя запасы липы, получим неравенство: $0,05x_1 + 0,15x_2 \le 120$. Рыночное ограничение по спросу на шкафы записывается так: $x_2 \le 700$.

Итак, задача отыскания оптимального плана производства столов и шкафов сводится к определению таких значений неизвестных x_1^* и x_2^*, которые удовлетворяют системе ограничений и доставляют максимум линейной функции Z:

$$Z = 750x_1 + 1200x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 0,1x_1 \quad + 0,02x_2 \le 100, \\ 0,05x_1 + 0,15x_2 \le 120, \\ x_2 \le 700, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.2. Задача планирования комплектации

Основным недостатком задачи планирования по валу является то, что в ней не учитывается спрос потребителей продукции. Поэтому зачастую в оптимальном решении такой задачи выпуск некоторых видов товаров является нулевым, а других товаров – очень большим, что приводит к экономической неэффективности.

Рассмотрим ситуацию, когда структура продукции задается одним вектором комплекта $\hat{x} = \{\hat{x}_j\}$, где $\hat{x}_j$ – количество единиц продукции j-го вида в одном комплекте, $j = 1, 2, ..., m$, m – число видов товаров. Величина α – это число выпускаемых комплектов.

Как и в задаче (1), исходными данными в задаче на комплектацию будут технологическая матрица $A = \{a_{ij}\}$, вектор ресурсов $b = \{b_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$. Переменными задачи на комплектацию будут вектор выпуска продукции $x = \{x_j\}$, а также число комплектов α. Кроме того, в данной задаче два вида ограничений:

1) ресурсное ограничение вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{im}x_m \le b_i$ (см. задачу (1));

2) ограничение на выпуск комплектов $x \ge \alpha\hat{x}$ (выпуск продукции должен покрывать потребности на комплект).

Целевой функцией будет максимизация выпуска комплектов α. Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m, \alpha) = \alpha \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \le b_1, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m \le b_n, \\ x_1 \ge \alpha\, \hat{x}_1, \\ ... \\ x_m \ge \alpha\, \hat{x}_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_m \ge 0. \end{cases}$$

Экономический смысл данной задачи заключается в максимизации выпуска комплектов с учетом ограничений на ресурсы, чтобы при этом выпуск продукции покрывал потребности на производство комплектов.

1.2.1. *Пример*

Кондитерская фабрика производит три вида продукции: булочки, печенье и кексы. Основными ресурсами для их производства являются: а) мука; б) яичный порошок; в) маргарин; г) сахар; д) трудовые ресурсы.

Данные о нормах закладки и трудозатрат (одной единицы ресурса на одну единицу продукта), а также имеющийся в наличии запас ресурсов приведены в следующей таблице.

Продукт / Ресурс	Нормы затрат			Запас, ед.
	Булочки	Печенье	Кекс	
Мука	0,3	0,2	0,2	200
Яичный порошок	0,1	0,1	0,2	70
Маргарин	0,05	0,2	0,15	50
Сахар	0,1	0,2	0,1	100
Труд	0,2	0,1	0,2	120

Анализ спроса показал, что среднестатистический потребитель покупает данные три вида продукта в пропорции $2:3:1$. Производитель хочет максимизировать выпуск продукции в такой пропорции.

Составьте задачу линейного программирования.

Решение

Обозначим x_1, x_2 и x_3 объемы выпуска соответственно булочек, печенья и кексов. Пропорция спроса равна $2:3:1$, следовательно, вектор комплекта $\hat{x}^T = (2; 3; 1)$. Обозначим α число комплектов $\hat{x}$. Объем выпуска должен покрывать потребности на комплекты, поэтому $x_1 \geq 2\alpha_1; x_2 \geq 3\alpha; x_3 \geq \alpha$. Также в задаче есть ресурсные ограничения. Для первого ресурса (муки) он будет следующим $0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 \leq 200$. Аналогично для других ресурсов. Таким образом, получаем задачу комплектации следующего вида

$$\max \alpha$$

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 \leq 200, \\ \ldots \\ 0,2x_1 + 0,1x_3 + 0,2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 2\alpha, \ x_2 \geq 3\alpha, \ x_3 \geq \alpha, \\ x, \alpha \geq 0. \end{cases}$$

1.3. Транспортная задача

Пусть имеется n поставщиков однородного ресурса и m потребителей. Поставщик i может поставить в единицу времени S_i единиц ресурса $(i = 1, 2, ..., n)$. Спрос j-го потребителя за этот же период времени равен D_j единиц ресурса $(j = 1, 2, ..., m)$. Также известны тарифы на перевозку от каждого поставщика каждому потребителю, т.е. задана матрица тарифов $C = (c_{ij})$, где c_{ij} – стоимость перевозки одной единицы ресурса от i-го поставщика j-тому потребителю.

Требуется найти матрицу плана перевозок $X = (x_{ij})$ (где x_{ij} – количество единиц ресурса, которое перевозится от i-го поставщика j-тому потребителю), при которой общая сумма расходов на перевозку была бы минимальной. Рассмотрим два варианта транспортной задачи: «Закрытый» и «Открытый».

1.3.1. *Закрытая транспортная задача*

Транспортная задача называется *закрытой*, если общая потребность (спрос всех потребителей) равна общему предложению (объемы ресурсов в наличии у всех поставщиков), т.е. если

$$\sum_{j=1}^{m} D_j = \sum_{i=1}^{n} S_i \,.$$

Нужно найти план перевозок, т.е. переменными в задаче будут объемы перевозок $X = (x_{ij})$, всего этих переменных nm. По экономическому смыслу они не могут быть отрицательными, поэтому

$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Так как общий объем спроса равен общему объему предложения, то поставлено будет ровно столько, сколько есть у каждого поставщика. Тогда объем поставки от первого поставщика $(x_{11} + x_{12} + ... + x_{1m})$ равен предложению этого поставщика S_1. Аналогично для всех остальных поставщиков. Таким образом, имеем n ограничений для поставщиков

$$\left(\forall i = 1, 2, \ldots, n\right):\ \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_i\right).$$

Из условия закрытости задачи также следует, что каждому потребителю будет поставлено столько единиц ресурса, сколько они запрашивали. Т.е. для первого потребителя, общий объем поставки этому потребителю $(x_{11} + x_{21} + ... + x_{n1})$ равен спросу этого потребителя D_1. Аналогично для всех остальных потребителей. Отсюда получаем m ограничений для потребителей вида

$$\left(\forall j = 1, 2, \ldots, m\right):\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j\right).$$

Величина $c_{ij}x_{ij}$ показывает стоимость перевозки объема x_{ij} по направлению от i-го поставщика к j-тому потребителю. Необходимо минимизировать общие затраты на транспортировку, т.е. затраты по всем направлениям перевозки

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = (C, X).$$

Таким образом, закрытая транспортная задача является задачей линейного программирования вида

$$\min z = (C, X)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j, \quad j = 1,2,...,m, \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_i, \quad i = 1,2,...,n, \\ X \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

1.3.2. *Пример*

Три распределительных центра поставляют автомобили пяти дилерам. Автомобили от распределительных центров к дилерам перевозятся на трейлерах, и стоимость перевозок пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и зависит от количества перевозимых в трейлерах автомобилей. В следующей таблице приведены расстояния между распределительными центрами и дилерами (в км), а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в количествах автомобилей.

	Дилеры					Предложение
Центры	1	2	3	4	5	
1	100	150	200	140	35	**400**
2	50	70	60	65	80	**200**
3	40	90	100	150	130	**150**
Спрос	**100**	**200**	**150**	**160**	**140**	

Транспортные расходы на одну машину составляют 1,5 ден. ед. за один км пути перевозки.

Решение

Общая сумма спроса равна общему предложению (100 + 200 + 150 + + 160 + 140 = 400 + 200 + 150 = 750), поэтому данная транспортная задача является закрытой. Вектор спроса равен $D = \{100; 200; 150; 160; 140\}$, а вектор предложения $S = \{400; 200; 150\}$. Переменными задачи будут объемы перевозок из каждого центра к каждому дилеру, т.е. матрица плана перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix},$$

где x_{ij} – это количество автомобилей, перевозимых из i-го центра j-му поставщику $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, ..., 5)$.

Стоимость за 1 км транспортировки одного автомобиля равна 1,5 ден. ед., поэтому надо умножить расстояния между распределительными центрами и дилерами на эту величину, чтобы получить матрицу тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 150 & 225 & 300 & 210 & 52,5 \\ 75 & 105 & 90 & 97,5 & 120 \\ 60 & 135 & 150 & 225 & 195 \end{pmatrix},$$

где c_{ij} – это стоимость транспортировки в ден. ед. 1 автомобиля из i-го центра j-му поставщику $(i=1,2,3;\ j=1,2,...,5)$. Тогда задача линейного программирования будет иметь следующий вид

$$\min z = 150x_{11} + 225x_{12} + 300x_{13} + 210x_{14} + 52{,}5x_{15} +$$
$$+75x_{21} + 105x_{22} + 90x_{23} + 97{,}5x_{24} + 120x_{25} +$$
$$+60x_{31} + 135x_{32} + 150x_{33} + 225x_{34} + 195x_{35}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=100, \quad x_{12}+x_{22}+x_{32}=200, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=150, \quad x_{14}+x_{24}+x_{34}=160, \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}=140, \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=400, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=200, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=150, \\ X \ge 0. \end{cases}$$

1.3.3. *Открытая транспортная задача*

Зачастую объем общего спроса не равен общему объему предложения, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} D_j \ne \sum_{i=1}^{n} S_i .$$

Транспортная задача такого типа называется *открытой*. Возможны два варианта открытой задачи:

1. *Общий спрос превышает общее предложение*

$$R = \sum_{j=1}^{m} D_j - \sum_{i=1}^{n} S_i > 0 .$$

В этом случае спрос потребителей может быть не удовлетворен

$$\left(\forall i = 1, 2, \ldots, n\right):\ \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le S_i\right).$$

Предложение производителей должно быть выполнено

$$\left(\forall j = 1, 2, \ldots, m\right):\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j\right).$$

Задачу можно привести к закрытой форме, если ввести фиктивного поставщика R единиц ресурса, которыми можно удовлетворить дефицит.

Тарифы на перевозку товаров потребителям от фиктивного поставщика следует считать равными по величине (например, нулевыми).

2. *Общее предложение превышает общий спрос*

$$R = \sum_{j=1}^{m} D_j - \sum_{i=1}^{n} S_i < 0$$

В этом случае спрос потребителей должен быть удовлетворен

$$(\forall i = 1, 2, \ldots, n): \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_i \right).$$

Ограничение на возможности предложения производителей должно быть выполнено, т.е.

$$(\forall j = 1, 2, \ldots, m): \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le D_j \right).$$

Задачу можно привести к закрытой форме, если ввести фиктивного потребителя R единиц ресурса. Тарифы на перевозку товаров фиктивному потребителю от поставщиков следует считать равными по величине (например, нулевыми).

Таким образом, нами показано, что все возможные варианты открытой транспортной задачи сводятся к закрытой транспортной задаче. Данный факт используется при построении алгоритма решения транспортной задачи. При использовании универсальных решателей, таких как надстройка MS Excel «Поиск решения», этого можно не делать.

1.4. Сетевая транспортная задача. Задача об оптимальном потоке

Рассмотренную в предыдущем разделе транспортную задачу часто называют матричной транспортной задачей, поскольку в ней тарифы на перевозки и план перевозок кодируются матрицами C и X соответственно. Более адекватной представляется сетевая постановка транспортной задачи. Рассмотрим ее подробнее.

Моделью возможных коммуникаций будем считать связный ориентированный граф $G = (V, A)$. Множество вершин V включает множество поставщиков, множество потребителей и транзитные вершины. Множество дуг A содержит все возможные коммуникации. $|V| = n$, $|A| = m$.

Потребители и производители продукта ассоциируются с вершинами графа $G=(V,A)$ заданием на множестве V дивергенции, т.е. функции $\operatorname{div}: V \to \mathrm{R}$, такой, что если вершине $v \in V$ соответствует потребитель, то $\operatorname{div}(v) < 0$, если вершине $v \in V$ соответствует производитель, то $\operatorname{div}(v) > 0$, транзитной вершине $v \in V$ соответствует значение $\operatorname{div}(v) = 0$.

В закрытой транспортной задаче $\sum_{v\in V} \operatorname{div}(v) = 0$. Открытая транспортная задача (т.е. случай $\sum_{v\in V} \operatorname{div}(v) \neq 0$) легко сводится к закрытой задаче введением фиктивной вершины v', соответствующим расширением множества A и функций cap и cost на него (сделайте это!). В дальнейшем будем рассматривать только случай закрытой транспортной задачи.

Число единиц груза, которое можно передать по соответствующей коммуникации, моделируется заданием для каждой дуги $a \in A$ заданием ее пропускной способности: функции $\operatorname{cap}: A \to \mathrm{R} : \operatorname{cap}(a) > 0$.

Стоимость перевозки одной единицы груза по каждой коммуникации задается функцией $\operatorname{cost}: A \to \mathrm{R} : \operatorname{cost}(a)$.

Граф $G = (V, A)$ с заданными функциями

$$\operatorname{div}: V \to \mathrm{R},\ \operatorname{cap}: A \to \mathrm{R} \text{ и } \operatorname{cost}: A \to \mathrm{R},$$

т.е. набор $N = \langle G, \operatorname{div}, \operatorname{cap}, \operatorname{cost} \rangle$ называют *сетью*.

Потоком в сети N называют функцию $\varphi: A \to \mathrm{R}$, удовлетворяющую условиям

$$(\forall v \in V)\left(\sum_{w\in S_-(v)} \varphi(v,w) - \sum_{w\in S_+(v)} \varphi(w,v) = \operatorname{div}(v) \right),$$
$$(\forall (v,w) \in A)(0 \le \varphi(v,w) \le \operatorname{cap}(v,w)),$$

где $S_-(v) = \{ w \in V : (v,w) \in A \}$ − множество вершин, в которые входят дуги из вершины $v \in V$; $S_+(v) = \{ w \in V : (w,v) \in A \}$ – множество вершин, из которых исходят дуги в вершину $v \in V$.

Из изложенного видно, что задача планирования перевозок с минимальными транспортными издержками имеет вид

$$(\operatorname{cost}, \varphi) = \sum_{a\in A} \varphi(a) \cdot \operatorname{cost}(a) \to \min_{\varphi},$$
$$(\forall v \in V)\left(\sum_{w\in S_-(v)} \varphi(v,w) - \sum_{w\in S_+(v)} \varphi(w,v) = \operatorname{div}(v) \right),$$
$$(\forall (v,w) \in A)(0 \le \varphi(v,w) \le \operatorname{cap}(v,w)).$$

Известны эффективные алгоритмы решения данной задачи в терминах теории графов [6]. Для использования универсальных решателей, таких как надстройка MS Excel «Поиск решения», необходимо использовать векторно-матричную постановку.

$$\left(\mathrm{cost},\varphi\right)=\sum_{a\in A}\varphi(a)\cdot\mathrm{cost}(a)\to\min_{\varphi},$$
$$I\cdot\varphi=\mathrm{div}(V),$$
$$\varphi\le\mathrm{cap}(A),$$
$$\varphi\ge 0,$$

где I – матрица *инцидентности* «вершины − дуги» графа $G=(V,A)$, $\mathrm{div}(V)=\left(\mathrm{div}(v_1),\mathrm{div}(v_2),\ldots\mathrm{div}(v_n)\right)^T$, $\mathrm{cap}(A)=\left(\mathrm{cap}(a_1),\mathrm{cap}(a_2),\ldots,\mathrm{cap}(a_m)\right)^T$. Элементы матрицы I равны

$$\left(\forall k=1,2,\ldots,n;\,l=1,2,\ldots,m\right)\left(i_{kl}=\begin{cases}-1, & \text{если дуга } l \text{ заходит в вершину } k,\\ 1, & \text{если дуга } l \text{ исходит из вершины } k,\\ 0, & \text{если дуга } l \text{ не инцидентна вершине } k\end{cases}\right).$$

Потоки

$$\underline{\varphi}=\arg\min_{\varphi}\left(\mathrm{cost},\varphi\right),\quad \overline{\varphi}=\arg\max_{\varphi}\left(\mathrm{cost},\varphi\right)$$

называют *потоками минимальной* и *максимальной стоимости* или, в соответствии с характером оптимизации, *оптимальными потоками*.

1.4.1. *Пример*

Транспортная сеть между поставщиком и его двумя потребителями показана на следующем рисунке.

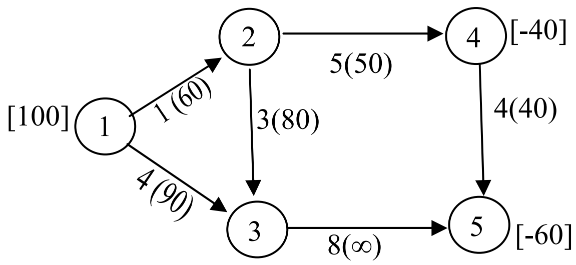


Рис. 1. Сеть для примера

В квадратных скобках указаны результирующие чистые потоки для соответствующих вершин, возле каждой дуги указаны соответствующий тариф и пропускная способность в круглых скобках. Найти минимальный поток в этой сети.

Решение

Как видно из рисунка 1, поставщику соответствует 1 вершина (его предложение $\mathrm{div}(1) = f_1 = 100$), а потребителям − вершины 4 и 5 (их потребности с обратным знаком равны $f_4 = -40$ и $f_5 = -60$). Вершины 2 и 3 являются транзитными. Общая сумма спроса равна общему предложению $100 = 40 + 60$, поэтому транспортная задача будет закрытой.

Всего в сети 6 дуг, обозначим соответствующие потоки по дугам переменными $\{x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{35}, x_{45}\}$. Критерием является минимизация стоимости потока

$$z = 1x_{12} + 4x_{13} + 3x_{23} + 5x_{24} + 8x_{35} + 4x_{45} \to \min .$$

Потоки по дугам не могут быть больше пропускной способности, поэтому

$$x_{12} \le 60, x_{12} \le 90, x_{23} \le 80, x_{24} \le 50, x_{45} \le 40 .$$

Отметим, что для x_{35} нет ограничения на пропускную способность.

Построим матрицу инцидентности для данного графа.

I	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{24}	a_{35}	a_{45}
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	−1	0	1	1	0	0
v_3	0	−1	−1	0	1	0
v_4	0	0	0	−1	0	1
v_5	0	0	0	0	−1	−1

Согласно ограничению задачи на поток входящий/исходящий $Ix = f$. Это равенство в координатной форме можно записать так

$$x_{12} + x_{13} = 100, -x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0, -x_{13} - x_{23} + x_{35} = 0,$$
$$-x_{24} + x_{45} = -40, -x_{35} - x_{45} = -60.$$

Таким образом, получили следующую задачу линейного программирования.

$$\min z = x_{12} + 4x_{13} + 3x_{23} +$$
$$+5x_{24} + 8x_{35} + 4x_{45},$$
$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} = 100, \\ \ldots, \\ -x_{35} - x_{45} = -60, \\ x_{12} \le 60, \\ \ldots \\ x_{45} \le 40, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

1.5. Сетевая задача о максимальном потоке

В стандартной сетевой задаче о максимальном потоке имеется один сток (такая вершина $v \in V$, что $S_{-}(v) = \varnothing$) и один источник (такая вершина $v \in V$, что $S_{+}(v) = \varnothing$). Источник – это пункт отправления, а сток – пункт назначения. Как правило, источник нумеруют первой вершиной, а сток – последней (например, v_1 и v_n). Требуется найти величину максимального потока, которую можно передать из источника в сток, с учетом пропускных способностей коммуникаций. На рис. 2 представлен пример графа сети (в скобках приведены пропускные способности дуг).

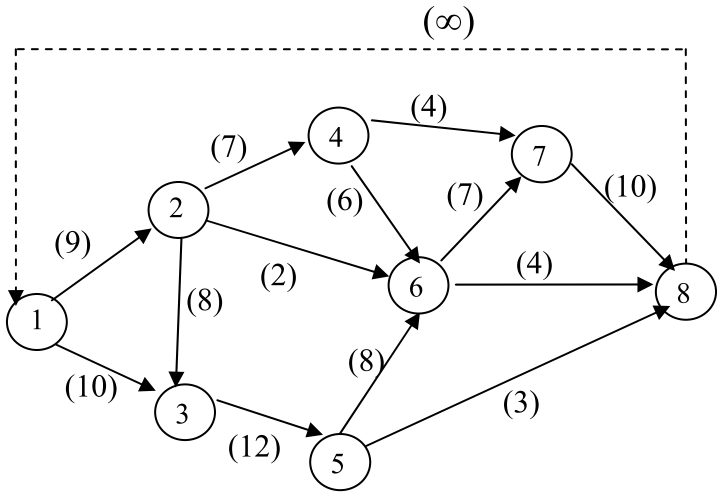


Рис. 2. Транспортная сеть

Для каждой вершины $v \in V - \{v_1, v_n\}$ (любой, кроме стока и источника) поток, входящий в эту вершину, должен быть равен потоку, исходящему из этой вершины, т.е.

$$\sum_{u \in S_{+}(v)} \varphi(u,v) = \sum_{u \in S_{-}(v)} \varphi(v,u),$$

где $\varphi(u,v)$ - это поток по дуге, исходящей из вершины u в вершину v.

Для стока и источника поток, исходящий из источника, должен быть равен потоку, входящему в сток, т.е. число единиц груза, оправленного из начального пункта должно быть равно числу единиц груза, пришедшего в конечную вершину, т.е.

$$\sum_{u \in S_{+}(v_n)} \varphi(u,v_n) = \sum_{u \in S_{-}(v_1)} \varphi(v_1,u) = \varphi(v_n, v_1).$$

Данные равенства эквивалентны включению в граф дуги (v_n, v_1) с неограниченной пропускной способностью (на рис. 2 показана штриховой линией), таким образом, имеем

$$(\forall v \in V)\left(\sum_{u \in S_+(v)} \varphi(u,v) = \sum_{u \in S_-(v)} \varphi(v,u) \right)$$

Пусть $\tilde{G} = \left(V, A \bigcup \{(v_n, v_1)\}\right)$. Из изложенного выше следует, что задача построения максимального потока в сети, представляемой графом G с заданными пропускными способностями дуг $\mathrm{cap}(A)$, эквивалентно задачи построения потока максимальной стоимости в сети

$$\left\langle \tilde{G} = \left(V, A \bigcup \{(v_n, v_1)\}\right), \mathrm{div}(V) = 0, \mathrm{cap}(A), \mathrm{cost}(A) = 0, \mathrm{cost}(v_n, v_1) = 1 \right\rangle.$$

Если в ориентированной графе несколько источников (стоков), то можно ввести фиктивный источник (сток), соединив его с источниками (стоками) дугами нулевой стоимости и неограниченной пропускной способности. Пример такой ситуации (два источника, три стока) показан на следующем рисунке (пунктиром показаны фиктивные вершины и дуги

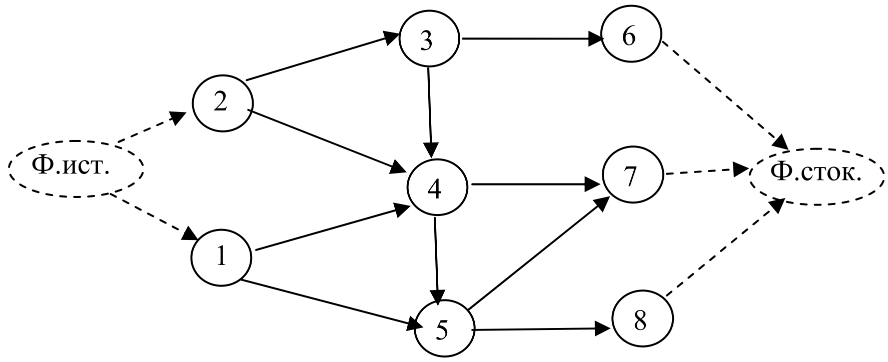


Рис. 3. Введение фиктивных вершин в сетях с несколькими источниками и стоками

1.5.1. *Пример*

Связи между серверами можно представить следующим ориентированным графом, представленным на рис. 4.

Вершины этого графа – это серверы, а дуги – это участок сети, возможное направление передачи информации между серверами. В скобках указаны пропускные способности соответствующих участков сети (максимальный объем передачи информации в единицу времени).

Необходимо передать без потерь информацию от сервера 1 к серверу 6 с максимальной скоростью.

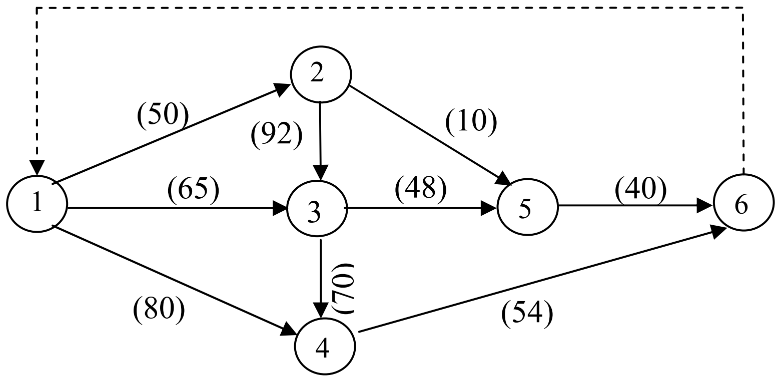


Рис. 4. Сеть в примере 1.5.1

Решение

Критерием задачи является максимизация скорости, т.е. нужно найти максимальный объем потока от источника к стоку в единицу времени. В этом случае стоимость передачи информации по каждой дуге c можно задать равной нулю. Всего в графе шесть вершин, вершина 1 – источник, вершина 6 – сток. Множеством дуг модифицированного графа $\tilde{G}$ является множество

$$A = \{a_{12}; a_{13}; a_{14}; a_{23}; a_{25}; a_{34}; a_{35}; a_{46}; a_{56}; a_{61}\}$$

(нижние индексы – это номер вершины начала и номер вершины конца дуги), всего в графе десять дуг. Переменными будет объем потока

$$\{x_{12}; x_{13}; x_{14}; x_{23}; x_{25}; x_{34}; x_{35}; x_{46}; x_{56}; x_{61}\}$$

по дугам в единицу времени. Таким образом, имеем следующую задачу линейного программирования.

$$z = x_{56} \to \max,\ Ix = 0,\ 0 \le x \le \mathrm{cap}(A),$$

в которой матрица I имеет вид

I	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{23}	a_{25}	a_{34}	a_{35}	a_{46}	a_{56}	a_{61}
v_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	–1
v_2	–1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
v_3	0	–1	0	–1	0	1	1	0	0	0
v_4	0	0	–1	0	–1	–1	0	1	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	–1	0	1	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	1

,

$$\mathrm{cap}(A) = (50; 65; 80; 92; 10; 70; 48; 54; 40; \infty)^T.$$

1.6. Задача о клиринге

Клиринг – это процедура зачета взаимной задолженности между предприятиями. Существуют специальные клиринговые службы, которые получают определенный процент дохода с погашения взаимной задолженности. Они заинтересованы в максимизации дохода от взаимозачетов.

Пусть имеется n предприятий, для которых нужно провести взаимозачет. Поставим в соответствие предприятиям вершины графа G. Отношение задолженности между двумя предприятиями представим в виде дуги, которая соединяет соответствующие вершины (m — общее количество дуг). Начало такой дуги – это предприятие-должник i, конец дуги – это предприятие-кредитор j, размер долга должника i перед кредитором j представим как пропускную способность $\mathrm{cap}(i, j)$, доходность операции клиринга определим как тариф $\mathrm{cost}(i, j)$. Поскольку при взаимозачете все поступившие на предприятие i платежи идут на погашение долга, то $\mathrm{div}(i) = 0$. Таким образом, задача на клиринг задается сетью

$$N = \left\langle (V, A), \mathrm{div}(V) = 0, \mathrm{cap}(A), \mathrm{cost}(A) \right\rangle.$$

Потоком по дуге (i, j) будет размер взаимозачета для долга должника i перед кредитором j. Он не может быть отрицательным и больше самого долга, т.е. $0 \le \varphi(i, j) \le \mathrm{cap}(i, j)$. В данном случае оптимальным решением будет поток максимальной стоимости в сети N.

Стоит отметить, что решением задачи на клиринг будут различные циклы взаимозачета, поэтому её можно решить, используя в качестве переменных потоки по циклам в графе. Если число циклов взаимозачета невелико, то такой подход позволит уменьшить количество переменных и ограничений. Рассмотрим данный подход подробнее.

Пусть имеется K допустимых циклов взаимозачета. Обозначим переменной σ_k поток взаимозачета по циклу под номером k, $k = 1, 2, ..., K$. Размер взаимозачета не может быть отрицательным, поэтому $\sigma_k \ge 0$. Каждая дуга может входить в некоторые циклы. такие отношения включения можно представить в виде матрицы инцидентности «дуги-циклы» $H = \{h_{jk}\}$ размером $m \times K$, где h_{jk} равно 1, если j-ая дуга входит в цикл, в противном случае $h_{jk} = 0$. Произведение данной матрицы H на вектор циклических потоков $\sigma = \{\sigma_k\}$ показывает погашенные задолженности по дугам.

По условию, размер погашенной задолженности по дуге не может быть больше реального долга, поэтому $H\sigma \le \mathrm{cap}(A)$.

Критерием задачи является максимизация дохода от взаимозачета, следовательно, целевая функция будет

$$z_1 = (c, H\sigma) = (H^T c, \sigma) \to \max.$$

Отсюда получаем следующую задачу линейного программирования

$$\max z_1 = (H^T c, \sigma),$$
$$\begin{cases} H\sigma \le w, \\ \sigma \ge 0. \end{cases} \quad (3)$$

1.6.1. *Пример*

Необходимо провести взаимозачеты между четырьмя предприятиями, отношения задолженности между которыми представлены на следующем рисунке (в скобках приведены размеры долга, число перед скобками – доходность).

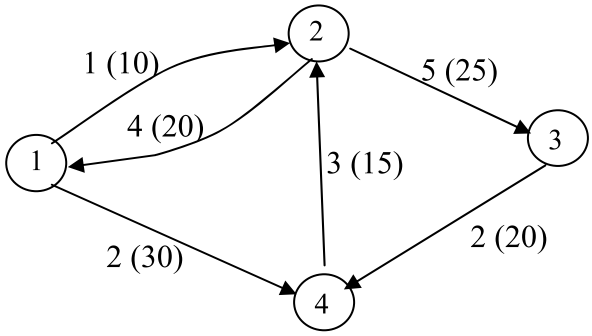


Рис. 5. Граф сети для примера 1.6.1

Составьте задачу, максимизирующую доход клиринговой компании.

Решение

Сначала нужно найти все простые циклы (см. рис. 5): σ_1 − поток по циклу $(1-2-1)$, σ_2 − поток по циклу $(1-4-2-1)$, σ_3 − поток по циклу $(2-3-4-2)$. Все циклические потоки неотрицательны $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ge 0$.

Всего в графе 6 дуг, поэтому матрица H будет размера 6×3 такого вида.

H	σ_1	σ_2	σ_3
a_{12}	1	0	0
a_{14}	0	1	0
a_{21}	1	1	0
a_{23}	0	0	1
a_{34}	0	0	1
a_{42}	0	1	1

В задаче есть ограничение на пропускную способность $H\sigma \le \mathrm{cap}(A)$ или

$$\sigma_1 \le 10, \sigma_2 \le 30, \sigma_1 + \sigma_2 \le 20, \sigma_3 \le 25, \sigma_3 \le 20, \sigma_2 + \sigma_3 \le 15.$$

Доходности по дугам равны $(1; 2; 4; 5; 2; 3)$. Отсюда получаем коэффициенты целевой функции

$$H^T c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Тогда критерий задачи будет $z = 5\sigma_1 + 9\sigma_2 + 10\sigma_3 \to \max$.

Таким образом, соответствующая задача линейного программирования будет иметь следующий вид.

$$z = 5\sigma_1 + 9\sigma_2 + 10\sigma_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} \sigma_1 \le 10, \\ \ldots \\ \sigma_2 + \sigma_3 \le 15, \\ \sigma \ge 0. \end{cases}$$

1.7. Формы представления задач ЛП

Задачей линейного программирования в *общей форме записи* называют задачу, в которой целевая функция является линейной функцией, ограничения задаются с помощью системы линейных уравнения и линейных неравенств.

Задачей линейного программирования в *канонической форме* записи (КЗЛП) называют задачу, в которой все ограничения являются уравнениями, все переменные неотрицательны и все свободные члены в системе ограничений неотрицательные.

КЗЛП в координатной записи имеет вид:

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \min(\max),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_m \ge 0, \\ b_1 \ge 0, b_2 \ge 0, ..., b_n \ge 0. \end{cases}$$

В сокращенном виде (с применением знака суммирования) выглядит так:

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min(\max),$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, i = (\overline{1,n}), \\ x_j \ge 0, \ j = (\overline{1,m}), \\ b_i \ge 0, i = (\overline{1,n}). \end{cases}$$

КЗЛП в матричной записи имеет следующий вид:

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m) = (c, x) \to \min(\max),$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \ge 0, \\ b \ge 0, \end{cases}$$

где использованы следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_m \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Примером канонической задачи на минимум является закрытая транспортная задача.

Задачей линейного программирования в *стандартной (симметричной) форме* (СЗЛП) называют задачу линейного программирования на максимум, в которой все ограничения являются неравенства типа «≤» и все переменные удовлетворяют условиям неотрицательности. В задаче линейного программирования на минимум все ограничения являются неравенствами типа «≥»; все переменные также должны быть неотрицательными.

СЗЛП в координатной форме имеет два варианта записи:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \max, \qquad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \le b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m \le b_n, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_m \ge 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \ge b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m \ge b_n, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_m \ge 0. \end{cases}$$

Сокращенный вариант для СЗЛП:

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{j=1}^{m} c_jx_j \to \max, \qquad Z(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{j=1}^{m} c_jx_j \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \le b_i, i = (\overline{1,n}), \\ x_j \ge 0,\ j = (\overline{1,m}); \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \ge b_i, i = (\overline{1,n}), \\ x_j \ge 0,\ j = (\overline{1,m}). \end{cases}$$

СЗЛП в матричной записи имеет вид

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m) = (c, x) \to \max \qquad Z(x_1, x_2, ..., x_m) = (c, x) \to \min$$

$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} Ax \ge b, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Примером стандартной задачи на максимум является задача по валу (задача планирования производства).

Зачастую экономические задачи имеют следующий вид

$$Z(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{j=1}^{m} c_jx_j \to \max \qquad Z(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{j=1}^{m} c_jx_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \le b_i, i = (\overline{1,k}), \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_{i'}, i' = (\overline{k+1,n}), \\ x_j \ge 0,\ j = (\overline{1,l}), \\ x_{j'} \in R,\ j' = (\overline{l+1,m}); \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \ge b_i, i = (\overline{1,k}), \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_{i'}, i' = (\overline{k+1,n}), \\ x_j \ge 0,\ j = (\overline{1,l}), \\ x_{j'} \in R,\ j' = (\overline{l+1,m}). \end{cases}.$$

Назовем такой вид записи задачи *специальным стандартным*. Например, сетевая задача о максимальном потоке имеет специальный стандартный вид на максимум.

Каноническая форма задачи линейного программирования необходима для решения посредством симплекс-метода, стандартный (специальный стандартный) вид применяется для графического метода, для оптимизации с помощью специальных пакетов программ и для составления двойственной задачи. Поэтому на практике часто требуется перейти от одной формы записи задачи к другой. Это можно сделать с помощью преобразований, представленных далее. Задачу нахождения минимума функции Z можно свести к задаче максимизации противоположной функции $(-Z)$, изменив знаки всех коэффициентов целевой функции на противоположные. Оптимальные решения X^* полученных таким образом задач на максимум и минимум будут совпадать, а значения целевых функций в точках экстремумов будут отличаться знаками.

Если свободный член b_i уравнения в i-той строке системы ограничений является отрицательным, то после умножения i-го уравнения на (-1) получается равносильная система ограничений, в которой $b_i' = -b_i > 0$.

Переменную x_j, которая может принимать отрицательные значения, можно заменит разностью двух неотрицательных переменных: $x_j = x_j' - x_j''$, где $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$. Чтобы ограничения-неравенства преобразовать в равенства ввести *дополнительные (балансовые)* неотрицательные переменные. Если ограничения имеют знак «$\leq$», т.е. вида

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i,$$

то к левой части прибавить дополнительную переменную

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + \tilde{x}_i = b_i$$

(где $\tilde{x}_i \geq 0$ - вспомогательная переменная).

Если ограничения имеют знак «$\geq$», т.е. вида

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i,$$

то дополнительную неотрицательную переменную необходимо вычесть из левой части

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - \tilde{x}_i = b_i.$$

Дополнительная переменная вводится в целевую функцию с нулевым коэффициентом и поэтому не влияет на её значение. Уравнение в i-той строке системы ограничений вида

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i$$

можно записать как два неравенства, а знак ограничения с «≤» на «≥» можно изменить, умножив левую и правую часть ограничения на (-1)

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i, \\ -\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq -b_i, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq -b_i, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i. \end{cases}$$

1.8. Геометрический (графический) метод решения задач линейного программирования

Данный метод применяется для решения задач линейного программирования с двумя переменными, в которых все ограничения заданы в виде неравенств, а целевая функция имеет следующий вид:

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max \quad (\min).$$

Геометрический метод решения заключается в последовательной реализации **следующих этапов**.

1. *На координатной плоскости строим область допустимых решений задачи* Ω.
2. *От начала системы координат откладываем вектор нормали* $\bar{N} = \{c_1, c_2\}$.
3. *Строим прямую* L_0 *нулевого уровня функции* Z *перпендикулярно вектору* $\bar{N}$.
4. *Находим опорные прямые для задачи линейного программирования (прямая* L *называется <u>опорной</u>, если она параллельна прямой* L_0 *и её пересечение с областью* Ω *состоит только из граничных точек области* Ω*).*

   С этой целью прямую L_0 параллельно перемещаем в направлении вектора $\bar{N}$. *Наименьшее значение* целевой функции достигается в точках <u>«входа»</u> линии уровня в область Ω, т.е. в точках, где перемещаемая прямая впервые начинает пересекать область Ω. *Наибольшее значение* целевой функции достигается в точках <u>«выхода»</u> линии уровня в область

Ω, т.е. в точках, где перемещаемая прямая в «последний раз» пересекает область Ω (при дальнейшем смещении прямая не будет пересекать область Ω).

5. *Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений линия уровня уходит в бесконечность, то задача линейного программирования не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции. Для допустимой задачи линейного программирования определяем координаты точек «входа» (если задача на минимум) и точек «выхода» (если задача на максимум) и значение целевой функции в этих точках.*

В зависимости от характера области допустимых решений и взаимного расположений области Ω и вектора $\overline{N}$ возможны разные случаи – в задаче может быть одна опорная прямая, две или вообще ни одной опорной прямой; множество точек «входа» (точек «выхода») может быть пустым, состоять из одной точки, совпадать с отрезком или лучом.

Некоторые из возможных ситуаций приведены на следующем далее рисунке 6, на котором область Ω выделена штриховкой, а прямая L_0 нулевого уровня функции Z и опорные прямые нарисованы пунктиром.

Рисунок содержит шесть фрагментов:

А. Область Ω задачи – пустое множество, следовательно, задача ЛП не имеет решений.

Б. Область Ω состоит из единственной точки A, поэтому и минимум, и максимум целевой функции достигаются в точке A, т.е. $Z_{\max} = Z_{\min} = Z(A)$.

В. Область Ω – выпуклый многоугольник $ABCDE$. В данном случае целевая функция достигает наименьшего значения в единственной точке A, а наибольшего – в любой точке отрезка CD.

Г. Область Ω – выпуклая неограниченная область; $Z_{\max} = Z(A)$, точек минимума функция Z не имеет ($Z_{\min} \to -\infty$).

Д. Целевая функция не имеет наименьшего значения ($Z_{\min} \to -\infty$); наибольшее значение функции Z достигается в любой точке луча BC.

Е. Область Ω – выпуклая неограниченная область. В данном случае функция не имеет точек максимума, ни точек минимума ($Z_{\max} \to +\infty, Z_{\min} \to -\infty$).

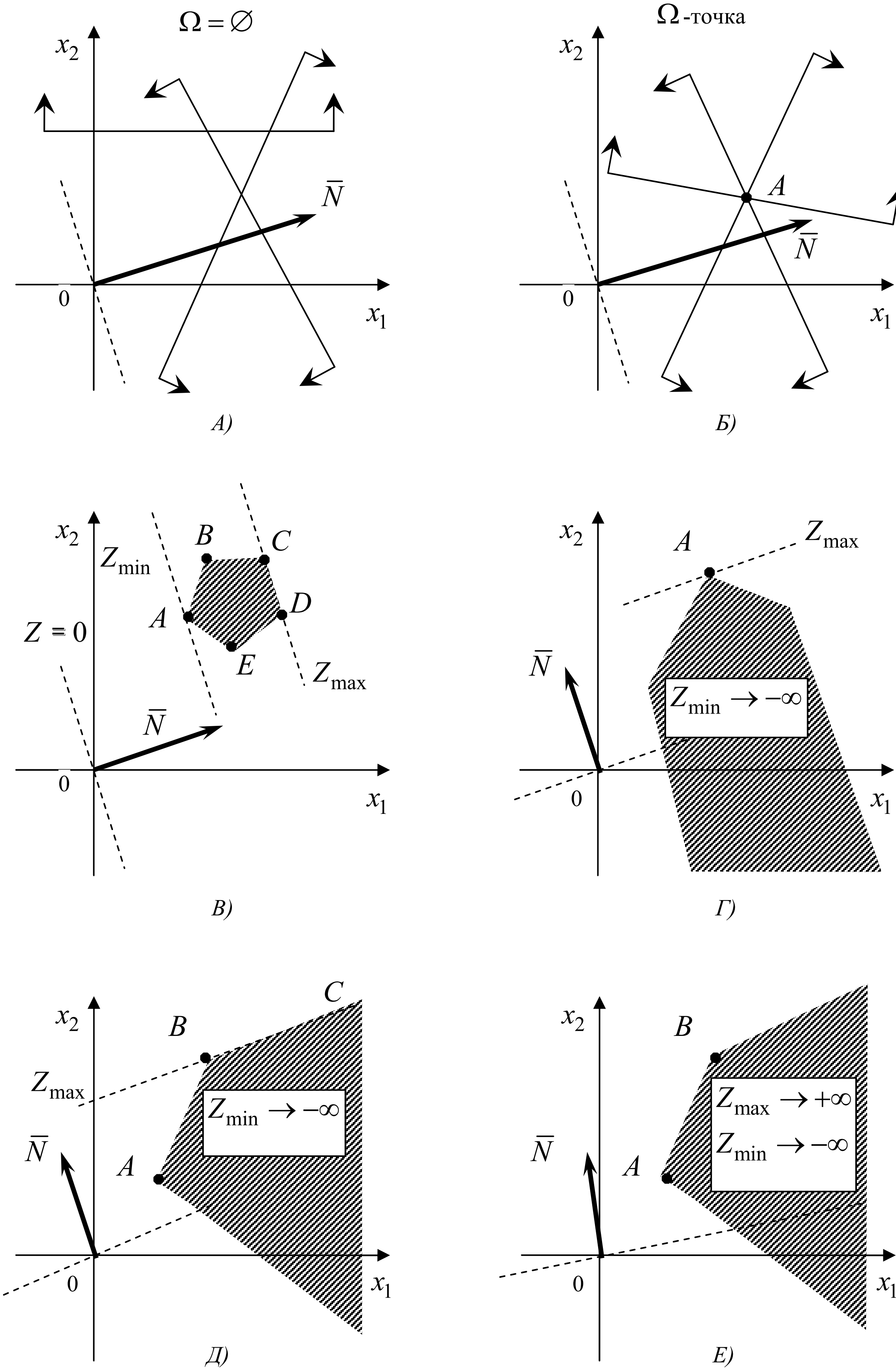


Рис. 6. Примеры графического решения

1.8.1. *Пример*

Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le -3. \end{cases}$$

Решение

1 этап. Построение область допустимых решений Ω задачи.

Составляем уравнения трех прямых в соответствии с неравенствами, входящими в систему ограничений: $L_1 \square x_1 + x_2 = 0$, $L_2 \square -x_1 + x_2 = 4$, $L_3 \square x_1 - 2x_2 \le -3$.

Строим полученные прямые в плоскости OX_1X_2 по точкам из таблиц:

$L_1 \sim$

x_1	0	−1	1
x_2	0	1	−1

, $L_2 \sim$

x_1	0	−4	−2
x_2	4	0	2

, $L_3 \sim$

x_1	0	−3	−1
x_2	3 / 2	0	1

Для прямой L_1 в качестве контрольной точки возьмем точку $(1; 0)$. Подставляя её координаты в неравенство $x_1 + x_2 \ge 0$, получаем верное числовое неравенство $1 + 0 > 0$. Следовательно, точка $(1; 0)$ принадлежит полуплоскости, определяемой неравенством $x_1 + x_2 \ge 0$. Для L_1 нельзя взять точку $(0; 0)$ как контрольную, так как эта точка лежит на самой прямой.

Для прямых L_2 и в качестве контрольной можно выбрать точку $(0; 0)$, причем данная точка принадлежит полуплоскости, определяемой неравенством $-x_1 + x_2 \le 4$, но не лежит в полуплоскости, заданной неравенством $x_1 - 2x_2 \le -3$.

На следующем рисунке полуплоскости выделяются стрелками, которые начинаются на граничных прямых и направлены внутрь искомой полуплоскости. Область допустимых решений Ω − это пересечение трех построенных полуплоскостей; она представляет собой неограниченную многоугольную область и на рисунке 7 выделена штриховкой.

2 этап. По виду целевой функции определяем *вектор нормали* $\overline{N} = \{2; 1\}$ и строим его на плоскости.

3 этап. Через начало координат проводим пунктирную *прямую* L_0, *перпендикулярную вектору нормали* $\overline{N}$.

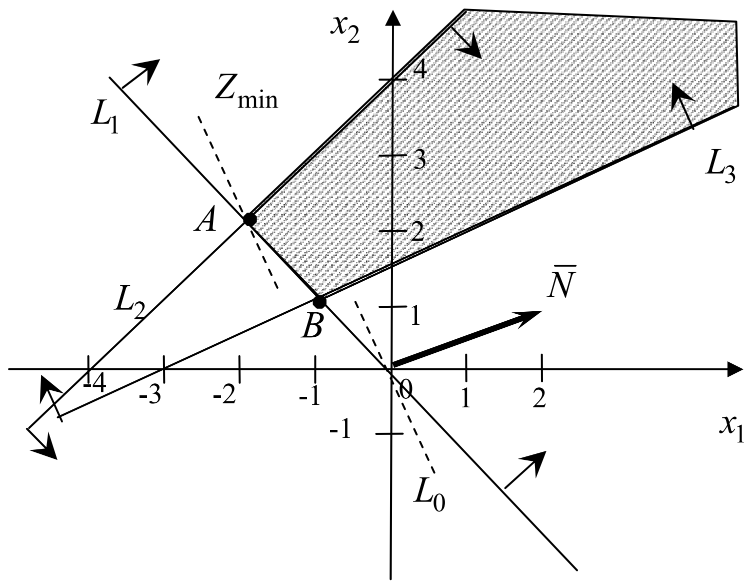


Рис. 7. Графическое решение для примера 1.8.1

4 этап. Перемещая прямую L_0 параллельно себе до положения прямой (помеченной на рис. символом $Z_{\min}$) определяем графически *точку «входа»* A, в которой функция Z достигает своего наименьшего значения. Точка A – это точка пересечения прямых L_1 и L_2; находим её координаты, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Итак, точка A имеет координаты $(-2; 2)$. Вычисляем наименьшее значение целевой функции, подставляя в уравнение функции Z координаты точки A: $\min Z = Z(A) = 2 * (-2) + 2 = -2$.

Ответ: $Z_{\min} = -2; X^* = (-2; 2)$.

Решение задачи, полученное с помощью графического метода, существенно зависит от точности построения прямых и от правильного определения множества точек «входа» (точек «выхода»). Поэтому графики прямых следует рисовать очень аккуратно, а выбранный масштаб рисунка должен позволять изучить все особенности возникшей ситуации.

1.8.2. *Пример (на основе примера 1.2.1)*

Решить графически задачу по валу, рассмотренную в примере 1.2.1:

$$Z = 750x_1 + 1200x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,02x_2 \le 100, \\ 0,05x_1 + 0,15x_2 \le 120, \\ x_2 \le 700, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

В силу неотрицательности переменных ($x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$) область допустимых решений Ω располагается в первой четверти координатной плоскости. Строим полуплоскости, соответствующие первым трем неравенствам системы ограничений.

Для первого неравенства проводим граничную прямую $L_1 \sim 0,1x_1 + 0,02x_2 = 100$ через точки $(0;5000)$ и $(1000;0)$. В качестве контрольной возьмем точку $O(0;0)$. Подставляя её координаты в неравенство $0,1x_1 + 0,02x_2 \le 100$, получаем верное отношение $0,1 \cdot 0 + 0,02 \cdot 0 < 100$. Итак, искомой является та полуплоскость, которая содержит точку $O(0;0)$ (на следующем рисунке 8 она показана стрелками).

Находим полуплоскости, заданные неравенствами $0,05x_1 + 0,15x_2 \le 120$ (граничная прямая L_2) и $x_2 \le 700$ (граничная прямая L_3) Область Ω – общая часть построенных полуплоскостей, т.е. пятиугольник *OABCD* (см. следующий рисунок). Коэффициенты при переменных целевой функции являются координатами нормального вектора, т.е. $\bar{N} = \{750;1200\}$. Строим линию $L_0 \sim 750x_1 + 1200x_2 = 0$ нулевого уровня функции перпендикулярно вектору $\bar{N}$. Параллельным сдвигом прямой L_0 в направлении вектора $\bar{N}$ до положения опорной прямой, отмеченной на рисунке символом $Z_{\max}$, находим точку «выхода» C, в которой функция Z достигает наибольшего значения. Точка C – это точка пересечения прямых L_1 и L_2.

Решаем систему, составленную из уравнений прямых L_1 и L_2, и определяем координаты точки C.

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,02x_2 = 100, \\ 0,05x_1 + 0,15x_2 = 120, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 900, \\ x_2 = 500. \end{cases}$$

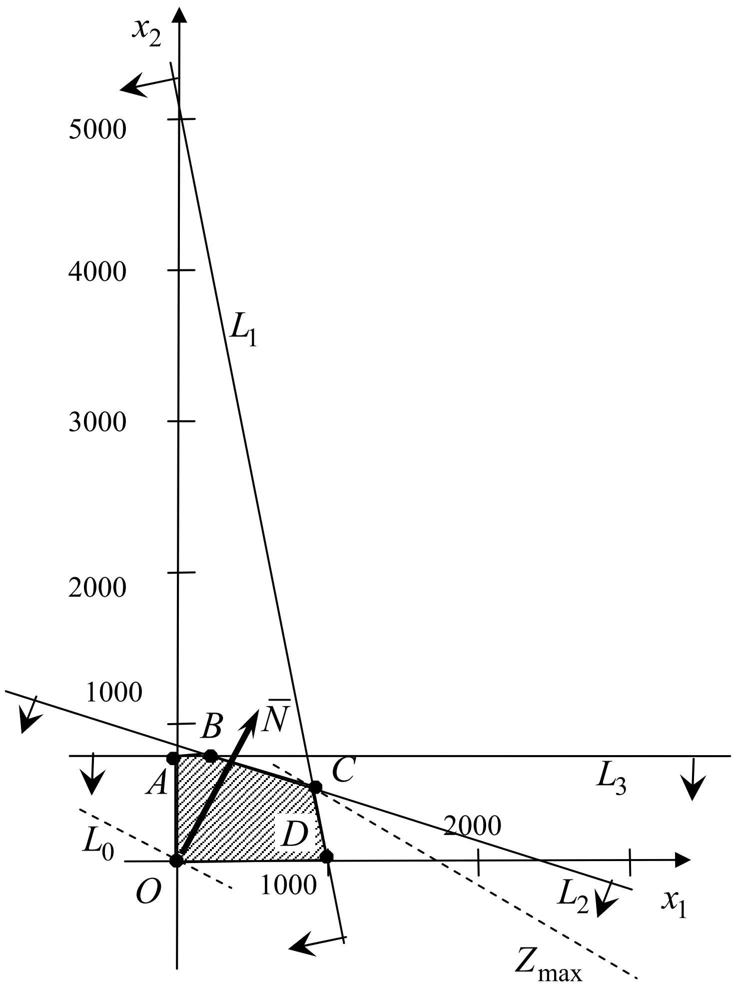


Рис. 8. Графическое решение для примера 1.8.2

Значит, точка C имеет координаты $(900; 500)$. Подставим координаты точки C в уравнение целевой функции Z, получим максимально возможное значение величины прибыли:

$$Z_{\max} = 750 \cdot 900 + 1200 \cdot 500 = 1275\,000 \text{ (ден. ед.)}.$$

Ответ: следует выпускать 900 шт. столов и 500 шт. шкафов; максимальная прибыль цеха по этим видам продукции за месяц составит 1,275 млн. ден. ед.

Графическим методом можно решать задачу линейного программирования и в случае, когда в ней имеется больше двух переменных, если некоторые переменные можно выразить через другие переменные таким образом, чтобы свести задачу с двумя переменными.

1.8.3. *Пример*

Решить геометрическим методом следующую задачу:

$$Z = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \geq 8, \\ 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Выразим переменную x_1 из уравнения, входящего в систему ограничений: $x_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}$. По условию задачи она неотрицательная, следовательно, должно выполняться условие $\frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2} \geq 0$ или $3x_2 \geq -5$.

Далее исключаем переменную x_1 из целевой функции и ограничений типа неравенств.

$$Z = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2\left(\frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}\right) - 2x_2 - 2x_3 = x_2 - 2x_3 + 5;$$
$$3\left(\frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}\right) - 4x_2 - x_3 \geq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_2 - x_3 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 - 2x_3 \geq 1;$$
$$\left(\frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}\right) - 2x_2 + 2x_3 \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x_2 + 4x_3 \leq 1.$$

Составляем вспомогательную задачу линейного программирования с двумя переменными:

$$Z' = x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 \geq 1, \\ -x_2 + 4x_3 \leq 1, \\ 3x_2 \geq -5, \\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0; \end{cases}$$

где $Z = Z' + 5$.

Решаем вспомогательную задачу графическим методом. Для этого строим три прямые – границы неравенств: $L_1 \sim x_2 - 2x_3 = 1$, $L_2 \sim -x_2 + 4x_3 = 1$, $L_3 \sim 3x_2 = 5$ (они представлены на рисунке 9).

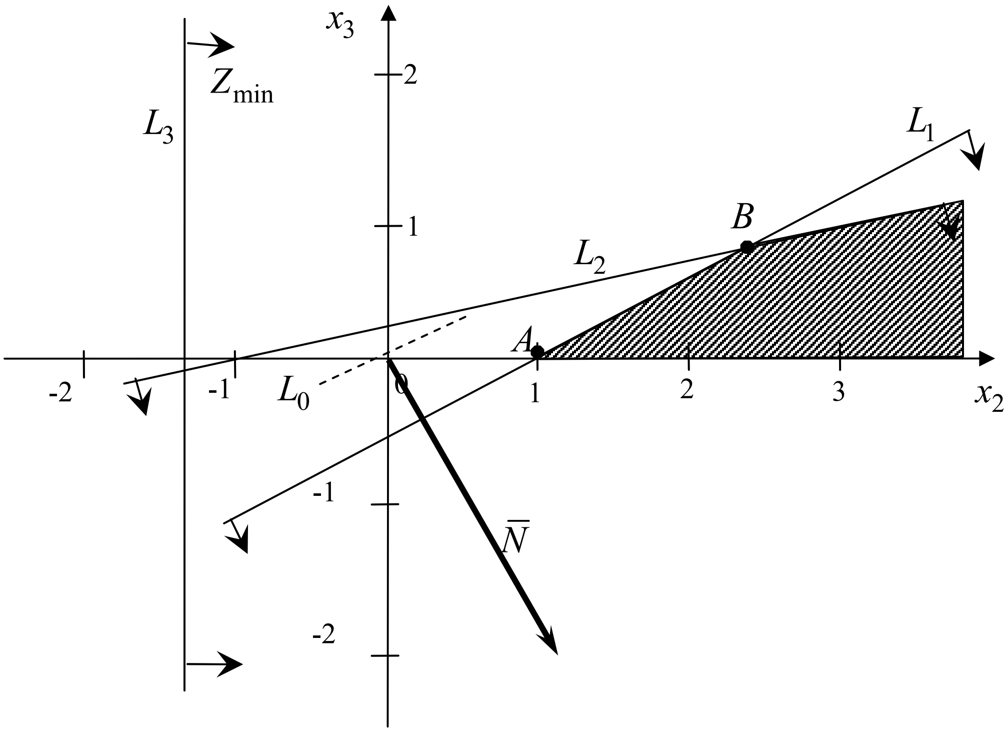


Рис. 9. Графическое решение для примера 1.8.3

Область допустимых решений Ω для задачи выделена штриховкой. Вектор нормали $\bar{N} = \{1; -2\}$ перпендикулярен прямой L_1, следовательно, наименьшее значение целевой функции Z' (а значит и Z) достигается на любой точке отрезка AB. Точка A имеет координаты $(1; 0)$, а точка B является точкой пересечения прямых L_1 и L_2, т.е. координаты точки B $(3; 1)$. Оптимальное решение вспомогательной задачи $X_{всп}{}^*$ находится на отрезке AB. Координаты точки $X_{всп}{}^*$ на отрезке AB можно вычислить с помощью следующей формулы

$$X_{всп}{}^* = (1-\alpha)A + \alpha B = \big((1-\alpha)*1 + \alpha*3; (1-\alpha)*0 + \alpha*1\big) = (2\alpha+1; \alpha),$$

$$\alpha \in [0; 1].$$

Так как $X_{всп}{}^* = \begin{pmatrix} x_2{}^* \\ x_3{}^* \end{pmatrix}$, то $x_2{}^* = 2\alpha + 1$, а $x_3{}^* = \alpha$.

Наименьшее значение целевой функции Z равно $Z_{\min} = Z'_{\min} + 5 = (2\alpha+1) - 2\alpha + 5 = 6$. Выразим через α оптимальное значение $x_1{}^*$: $x_1{}^* = \frac{3}{2}x_2{}^* + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(2\alpha+1) + \frac{5}{2} = 3\alpha + 4$.

Ответ: $Z_{\min} = 6$; $X^* = (3\alpha + 4; 2\alpha + 1; \alpha)$, где $\alpha \in [0; 1]$.

1.8.4. *Пример*

Привести к КЗЛП на максимум следующую задачу:

$$Z = 3x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Сначала от данной функции Z перейдем к функции $Z' = -Z$, чтобы получить задачу на максимум: $Z' = -Z = -3x_1 - x_2 \to \max$.

Переменная x_2 может быть отрицательной, поэтому заменим разностью двух неотрицательных переменных x_2' и x_2'': $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_2' \ge 0$, $x_2'' \ge 0$.

После замены переменной x_2 на x_2' и x_2'' в целевой функции и двух оставшихся ограничениях приходим к следующей записи:

$$Z' = -3x_1 - x_2' + x_2'' \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2' - x_2'' \ge 1, \\ x_1 - x_2' + x_2'' \le 0, \\ x_1 + 2x_2' + 2x_2'' = 3, \\ x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0. \end{cases}$$

Далее необходимо преобразовать первое и второе неравенства в уравнения, для этого из левой части первого неравенства вычтем балансовую неотрицательную переменную x_3, а к левой части второго неравенства прибавим неотрицательную дополнительную переменную x_4.

$$Z' = -3x_1 - x_2' + x_2'' \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2' - x_2'' - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2' + x_2'' + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2' + 2x_2'' = 3, \\ x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0, \\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

1.8.5. *Пример 1.6.2*

Привести к СЗЛП на минимум следующую задачу:

$$Z = -2x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Сравнивая форму записи предложенной задачи и стандартную форму, можно сделать вывод, что необходимо поменять знак первого ограничения с «≤» на «≥», а также преобразовать второе ограничение из уравнения в два неравенства:

$$4x_1 + x_2 \le 7 \Leftrightarrow -4x_1 - x_2 \ge -7\,;$$

$$3x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ -3x_1 + x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Тогда исходная задача равносильна следующей СЗЛП:

$$Z = -2x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 \ge -7, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ -3x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

2.1. Задача формирования равновесных цен на ресурсы

Вместе с *Производством*, формализованным в модели рассмотрим *Рынок*, который выполняет функции реализации продукции производства, реализации излишек тех или иных ресурсов и закупок недостающих ресурсов. При этом продажа продукции осуществляется по фиксированным ценам *Производства* $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, а продажа и закупка ресурсов по ценам *Рынка* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, устанавливающимся на основе конкурентного взаимодействия двух сторон − *Производства* и *Рынка*, имеющих собственные экономические интересы.

В прикладной математике имеется важное научное направление − *Теория игр*, изучающая математические модели конфликтных ситуаций. Дадим краткое описание игр двух лиц, интересы которых противоположны.

Пусть каждый из игроков располагает некоторым множеством согласованных с *правилами игры* способов поведения. Эти способы поведения называются *стратегиями*. Будем исходить из того, что стратегии игроков задаются векторами и $x \in X \subset \mathrm{R}^n$ соответственно; где X − множество всех стратегий первого игрока, P − множество всех стратегий второго игрока. По определению игры постулируется, что если игроки независимо друг от друга выбирают стратегии x и p, то этим однозначно определяется скалярная величина $F(x,p)$ – *платежная функция*, интерпретируемая как плата второго игрока первому. В основе способов определения игроками своих стратегий могут лежать различные принципы. Наиболее часто используемым является *принцип гарантированного результата*. К нему можно прийти на основе следующего рассуждения. Если первый игрок зафиксирует свою стратегию x, то он может гарантировать выигрыш в размере $f(x) = \min_{p \in P} F(x,p)$. Но так как выбор стратегии x в руках первого игрока, то он может обеспечить себе выигрыш

$$F_1 = \max_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} \min_{p \in P} F(x,p)$$

Аналогичные рассуждения со стороны второго игрока (его функция выигрыша равна $-F(x,y)$) приводят к операции

$$F_2 = \min_{p \in P} \max_{x \in X} F(x,p)$$

Если существуют стратегии $x^* \in X$, $p^* \in P$ такие, что $F_1 = F_2 = F(x^*, p^*) = F_0$, то они называются *оптимальными*} (или *равновесными*) стратегиями, а величина F_0 − *ценой игры*. Заметим, что анализ игры на основе принципа гарантированного результата соответствует безазартному, осторожному, нацеленному на получение пусть минимального, но гарантированного выигрыша. Изложенных сведений достаточно, чтобы перейти к рассматриваемой задаче.

Введенные выше взаимодействующие стороны будем рассматривать в роли двух игроков: *Производство* − первый игрок, *Рынок* − второй игрок со стратегиями $x \geq 0$ и $p \geq 0$ соответственно. В качестве платежной функции возьмем функцию Лагранжа задачи планирования по валу

$$F(x,p) = (c,x) - \sum_{i=1}^{m} p_i[(a_i,x) - b_i] = (c,x) - (p, Ax - b). \qquad (4)$$

Она выражает, как легко заметить из вида данной функции, итоговый доход производства от реализации продукции, продажи излишек и закупки недостающих ресурсов. Функция дохода производства $F(x,p)$ − это в то же время и функция издержек рынка. Если отыскание оптимальных стратегий

Производства и *Рынка* подчинить принципу гарантированного результата, то мы придем к двум задачам

$$F_1 = \max_{x\ge 0} \min_{p\ge 0} \left[(c,x) - (p, Ax - b) \right], \tag{5}$$

$$F_2 = \min_{p\ge 0} \max_{x\ge 0} \left[(c,x) - (p, Ax - b) \right]. \tag{6}$$

Докажем эквивалентность задачи планирования по валу задаче (5). Рассмотрим внутреннюю операцию в задаче (5)

$$\min_{p\ge 0} \left[(c,x) - (p, Ax - b) \right] = \begin{cases} (c,x) & \text{при} \quad Ax \le b; \\ -\infty & \text{при} \quad Ax \not\le b. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\max_{x\ge 0} \min_{p\ge 0} F(x,p) = \max_{Ax\le b,\, x\ge 0} (c,x) \tag{7}$$

Для исследования задачи (6) преобразуем функцию Лагранжа

$$F(x,p) = (c,x) - (p, Ax - b) = (c,x) - (p, Ax) + (p,b) =$$

$$= (c,x) - (A^T p, x) + (p,b) = (c - A^T p, x) + (p,b)$$

Рассмотрим внутреннюю операцию в задаче (6)

$$\max_{x\ge 0} \left[(c - A^T p, x) + (p,b) \right] = \begin{cases} (b,p) & \text{при} \quad A^T p \ge c; \\ +\infty & \text{при} \quad A^T p \not\ge c. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\min_{p\ge 0} \max_{x\ge 0} F(x,p) = \min_{A^T p\ge c,\, p\ge 0} (b,p)$$

Таким образом, в рамках игровой модели *Производство − Рынок* задача построения оптимальных цен *Рынка* оказывается эквивалентной задаче

$$(b,p) \to \min_{\{p \,|\, A^T p \ge c,\, p\ge 0\}}. \tag{8}$$

В теории линейного программирования задача (8) называется *двойственной* задаче (7) а раздел линейного программирования, изучающий связь этих задач, − *теорией двойственности*. Данная теория, в частности, устанавливает равенство значений целевых функций задач (7) и (8), следовательно, показывает, что оптимальные цены *Рынка* и оптимальный план *Производства* являются *равновесными стратегиями* в построенной игровой модели, что дает одну из *экономических интерпретаций двойственности* в линейном программировании. В данном разделе мы рассмотрим основные результаты теории двойственности.

2.2. Отношение двойственности для задач ЛП

В данном разделе мы определим *отношение двойственности* для задач линейного программирования и приведем его свойства.

Рассмотрим задачу линейного программирования общего вида

$$\begin{pmatrix} c_1^T & c_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \to \max, \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} A_{1'} & A_{1''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \le b_1, \qquad \begin{pmatrix} A_{2'} & A_{2''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = b_2,$$

$$x' \ge 0.$$

Задачу линейного программирования

$$\begin{pmatrix} b_1^T & b_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \to \min, \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} A_{1'}^T & A_{2'}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \ge c', \quad \begin{pmatrix} A_{1''}^T & A_{2''}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = c'',$$

$$y' \ge 0.$$

называют *двойственной* общей задаче линейного программирования (9).

Отношение двойственности для задач линейного программирования, как следует из приведенного выше определения, можно представить в виде следующей таблицы

Таблица

Отношение двойственности

Прямая задача	Двойственная задача
Вектор целевой функции ($\max$)	Правая часть системы ограничений
Правая часть системы ограничений	Вектор целевой функции ($\min$)
Матрица ограничений A	Матрица ограничений A^T
Вид i -того ограничения «$\le$»	Переменная $y_i \ge 0$
Вид i -того ограничения «$=$»	Переменная $y_i \in (-\infty;+\infty)$
Переменная $x_j \ge 0$	Вид j -того ограничения «$\ge$»
Переменная $x_j \in (-\infty;+\infty)$	Вид j -того ограничения «$=$»

Свойства отношения двойственности установлены в следующих теоремах:

Первая теорема двойственности. *Если взаимодвойственные задачи допустимы, то они обе имеют решения и одинаковые значения.*

Теорема. *Если одна из взаимодвойственных задач имеет оптимальное решение, то имеет решение и другая.*

Теорема. *Если одна из взаимодвойственных задач допустима, а вторая недопустима, то целевая функция первой задачи неограниченна на допустимом множестве.*

Теорема. *Задача двойственная к двойственной совпадает с прямой.*

2.3. Составление двойственной задачи

При составлении двойственной задачи следует учитывать следующее.

1. Если исходная задача на максимум, то двойственная к ней – на минимум.
2. Во всех ограничениях взаимодвойственных задач свободные члены должны находиться в правой части, а переменные величины – в левой.
3. Исходная задача должна быть приведена к стандартной или специальной стандартной форме.
4. Количество переменных в одной задаче равно числу ограничений в другой.
5. Каждой переменной x_j исходной задачи соответствует j-тое ограничение в двойственной задаче и , наоборот, j-тому ограничению в двойственной задаче соответствует переменная x_j исходной задачи. Аналогично, каждой переменной y_i двойственной задачи соответствует i-тое ограничение в исходной задаче и, наоборот, i-тое ограничению исходной задачи соответствует переменная y_i двойственной задачи.
6. Компоненты (ограничение и переменная) пары двойственных задач, однозначное соответствие между которыми устанавливаются согласно этому правилу, называются сопряженными условиями; при записи пары двойственных задач сопряженные условия принято располагать в одной строке.
7. В каждой паре сопряженных условий ограничению-неравенству соответствует неотрицательная переменная и, наоборот, каждой неотрицательной переменной соответствует ограничение-неравенство.
8. В каждой паре сопряженных условий ограничению-равенству соответствует произвольная переменная и, наоборот, каждой произвольной переменной соответствует ограничение-неравенство.
9. Свободные члены системы ограничений одной задачи являются коэффициентами целевой функции другой задачи.
10. Матрицы ограничений исходной и двойственной задач являются транспонированными по отношению друг к другу.

2.3.1. *Пример 2.1.1*

Составить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$Z = 7x_1 + 3x_2 + 9x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Целевая функция исходной задачи на минимум, поэтому второму ограничению нужно поменять знак с «$\le$» на «$\ge$», для чего умножим второе неравенство на (-1): $4x_1 + 7x_2 - x_3 \le 5 \Leftrightarrow -4x_1 - 7x_2 + x_3 \ge -5$. Отсутствие ограничений на знак переменной x_2 означает, что она может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения, т.е. $x_2 \in (-\infty; +\infty)$. Тогда специальный стандартный вид исходной задачи будет следующим:

$$Z = 7x_1 + 3x_2 + 9x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ -4x_1 - 7x_2 + x_3 \ge -5, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \in (-\infty; +\infty), x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Первые два ограничения в виде неравенства, поэтому первые две двойственные переменные y_1 и y_2 будут неотрицательными: $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$.

Третье ограничение является равенством, вследствие чего третья двойственная переменная y_3 будет произвольного знака: $y_3 \in (-\infty; +\infty)$. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи будет правая часть ограничений прямой задачи, т.е. $\{1; -5; 8\}$.

Так как целевая функция прямой задачи на минимум, целевая функция двойственной задачи будет на максимум. Итак, целевая функция двойственной задачи будет иметь вид $F = 1 * y_1 - 5 * y_2 + 8 * y_3 \to \max$, а ограничения двойственной задачи могут иметь знак «$\le$» или «=».

Переменная x_1 соответствует первому ограничению двойственной задачи. Коэффициент при x_1 в первом уравнении равен 2, во втором – (-4), а в третьем 1. Соответственно, левая часть первого ограничения двойственной задачи будет: $2y_1 - 4y_2 + y_3$.

Коэффициент при x_1 в целевой функции исходной задачи равен 7, а сама переменная x_1 неотрицательна, поэтому знак в первом ограничении двойственной задачи будет «≤». Отсюда первое ограничение двойственной задачи является $2y_1 - 4y_2 + y_3 \le 7$.

Аналогично составляются второе и третье ограничение двойственной задачи. Окончательный результат представим следующим образом:

Исходная задача:

$$Z = 7x_1 + 3x_2 + 9x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ -4x_1 - 7x_2 + x_3 \ge -5, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \in (-\infty; +\infty), x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$Z = y_1 - 5y_2 + 8y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \in (-\infty; +\infty), \\ 2y_1 - 4y_2 + y_3 \le 7, \\ 3y_1 - 7y_2 - 6y_3 = 3, \\ 5y_1 + y_2 + y_3 \le 9. \end{cases}$$

2.4. Теорема о дополняющей нежесткости (Вторая теорема двойственности)

Пусть x^* и y^* – оптимальные решения пары взаимодвойственных задач

$$x^* = \arg\max\{(c, x) : Ax \le b\}, \quad y^* = \arg\min\{(b, y) : A^T y \ge c\}.$$

Теорема о дополняющей нежесткости. *Пусть x и y являются допустимыми решениями взаимодвойственных задач. Чтобы x и y были соответствующими оптимальными решениями, необходимо и достаточно выполнение соотношений* $y^T(b - Ax) = 0$.

В соответствии с приведенной теоремой для оптимальных решений x^* и y^* пары взаимодвойственных задач должны выполняться равенства

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = (\overline{1, m}),$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = (\overline{1, n}),$$

Отсюда возможны следующие *варианты сопряженных условий*.

1. Неактивному ограничению прямой задачи соответствует нулевая переменная двойственной задачи:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* < b_i \right) \Rightarrow (y_i = 0).$$

2. Ненулевой переменной двойственной задачи соответствует активное ограничение прямой задачи:

$$\left(y_i > 0\right) \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i\right).$$

3. Неактивному ограничению двойственной задачи соответствует нулевая переменная прямой задачи:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* > c_j\right) \Rightarrow \left(x_j = 0\right).$$

4. Ненулевой переменной прямой задачи соответствует активное ограничение двойственной задачи:

$$\left(x_j > 0\right) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* = c_j\right).$$

Следует особо заметить, что при вырожденных оптимальных решениях возможны случаи:

1) $y_i^* = 0$ при этом $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i$;

2) $x_j^* = 0$ при $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* = c_j$.

В первом случае вырожденной будет двойственная задача, а оптимальное решение прямой задачи будет не единственным. Во втором – наоборот. Основной причиной вырожденности задач является то, что число активных ограничений больше числа ненулевых переменных.

2.4.1. *Пример*

Найти решение исходной задачи ЛП, используя решение двойственной.

$$Z = 12x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Приведем задачу к стандартному специальному виду на минимум:

$$Z = 12x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

В прямой задаче два ограничения и четыре переменных, поэтому в двойственной будут 2 переменных и 4 ограничения. Обозначим эти двойственные переменные y_1 и y_2. Первое ограничение прямой задачи имеет знак «$\geq$», след. $y_1 \geq 0$. У второго ограничения прямой задачи знак равенства, значит, $y_2 \in \mathrm{R}$. Правая часть ограничений прямой задачи – это коэффициенты целевой функции двойственной задачи

$$F = (-2)y_1 + (-1y_2) = -2y_1 - y_2.$$

Эту функцию нужно максимизировать, так как исходная задача была на минимум. Коэффициенты целевой функции прямой задачи являются правой частью двойственной задачи, а матрица коэффициентов в ограничениях при x – транспонированной матрицей коэффициентов ограничений при y. Все переменные исходной задачи x неотрицательны, а целевую функцию двойственной задачи необходимо максимизировать, поэтому четыре ограничения в двойственной задаче будут иметь знак «$\leq$»:

$$2y_1 + y_2 \leq 12, \quad -y_1 - y_2 \leq -1, \quad -2y_1 + 4y_2 \leq 2, \quad y_2 \leq 2.$$

Таким образом, двойственная задача имеет следующий вид.

$$F = -2y_1 - y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 12, \\ -y_1 - y_2 \leq -1, \\ -2y_1 + 4y_2 \leq 2, \\ y_2 \leq 2, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \in R. \end{cases}$$

Решим данную задачу графически. Границей первого ограничения будет $L_1 \sim 2y_1 + y_2 = 12$, для второго граница $L_2 \sim -y_1 - y_2 = -1$, для третьего граница $L_3 \sim 2y_1 + 4y_2 = 2$, а для четвертого $L_4 \sim y_2 = 2$. Нормалью целевой функции будет $\overline{N} = \{-2; -1\}$. Построим на основе этого допустимую область Ω и найдем оптимальную точку (см. рис. 10).

Из графика следует, что оптимальным решением является точка пересечения линий L_2 и L_3, т.е. решение системы уравнений

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 = -1, \\ -2y_1 + 4y_2 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1/3, \\ y_2 = 2/3. \end{cases}$$

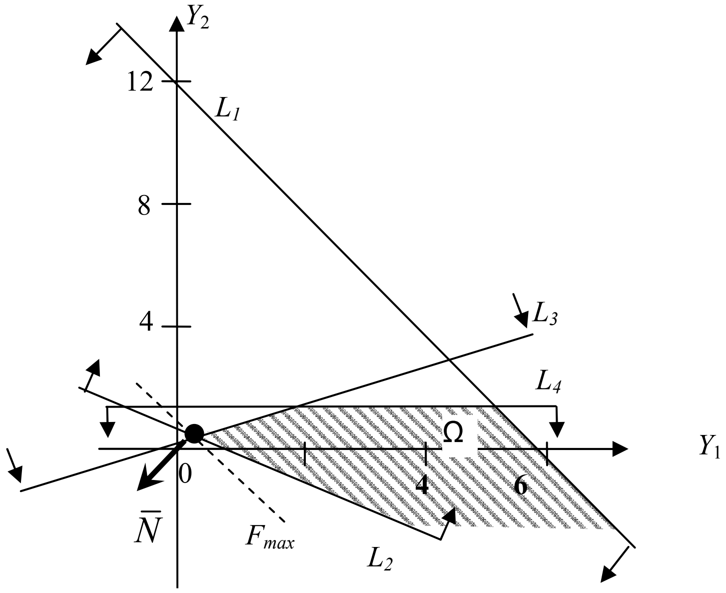


Рис. 10. Графическое решение для примера 2.4.1.

Отсюда оптимальным решением $Y*$ будет точка $(1/3;2/3)$, для которой значение задачи $F_{\max} = -4/3$.

Используя теорему о дополняющей нежесткости, найдем решение исходной задачи. Для этого проверим сопряженные условия. Значение $y_1 > 0$, следовательно, для оптимального решения $X*$ прямой задачи первое ограничение является *активным.* Первое и четвертое ограничения двойственной задачи не активны (имеет место строгие неравенство $2y_1^* + y_2^* = 5/3 < 12$, $y_2^* = 2/3 < 2$), поэтому оптимальное значение соответствующих переменных прямой задачи $x_1^* = x_4^* = 0$.

Значения целевой функции прямой и двойственной задачи совпадают $F_{\max} = Z_{\min} = -4/3$, поэтому $12x_1^* - x_2^* + 2x_3^* + 2x_4^* = -4/3$. Таким образом, остались неизвестными оптимальные значения x_2^* и x_3^*, которые можно найти, решив следующую систему ограничений.

$$\begin{cases} -x_2^* + 2x_3^* = -4/3, \\ -x_2^* - 2x_3^* = -2, \\ -x_2^* + 4x_3^* = -1, \\ x_2^*, x_3^* \ge 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $x_2^* = 5/3$, а $x_3^* = 1/6$.

Ответ: $Z_{\min} = -4/3$, $X* = (0;5/3;1/6;0)$.

2.4.2. *Пример*

Составить двойственную задачу к данной задаче ЛП.

$$Z = 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 \ge 0, \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Проверить, является ли $X = (2;1;0)$ оптимальным решением для данной задачи.

Решение

Приведем исходную задачу к стандартному специальному виду и построим к ней двойственную.

$$Z = 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max \qquad F = -2y_1 + 6y_2 + y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \le -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \in R \\ x_2 \ge 0, \\ x_3 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 \in R, \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = 4, \\ -y_1 + y_2 - y_3 \ge -4, \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 3. \end{cases}$$

Пусть Y^* - оптимальное решение двойственной задачи. Подставим решение $X = (2;1;0)$ в исходную задачу, получим:

$$Z = 4*2 - 4*1 + 3*0 = 4$$
$$\begin{cases} -2 - 1 < -2, \\ 2*2 + 1 < 6, \\ 2 - 1 = 1, \\ 2 > 0, \\ 1 > 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Так как в прямой задаче знаками первого и второго ограничения будет строгое неравенство, то по теореме о дополняющей нежесткости (если вектор X является оптимальным решением) $y_1^* = 0$ и $y_2^* = 0$. Кроме того, $x_1 = 2 \ne 0$ и $x_2 = 1 \ne 0$, поэтому по теореме о дополняющей нежесткости первое и второе ограничение двойственной задачи для Y^* будут равенством, т.е. $y_3^* = 4$. Значение целевой функции двойственной задачи $F_{\min} = 4$, оно равно $Z_{\max}$. Подставим значения Y^* в последнее ограничение, получим $4 > 3$, т.е. данное ограничение выполняется со знаком строгого неравенства. Отсюда по теореме о дополняющей нежесткости x_3 должно быть равно нулю, что действительно выполняется. Таким образом, данное решение $X = (2; 1; 0)$ является оптимальным.

Ответ: да.

2.5. Экономическая интерпретация двойственной задачи

Теорема о дополняющей нежесткости позволяет дать экономическую интерпретацию переменным, ограничениям и целевой функции двойственной задачи. Рассмотрим интерпретацию задачи, двойственной к задаче по валу.

Прямая задача | *Двойственная задача*

$$Z = (c, x) \to \max \qquad\qquad F = (b, y) \to \min \tag{11}$$

$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0. \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A^T y \ge c, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Пусть векторы $x*$ и $y*$ – оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задачи по валу.

Если $y_i^* > 0$, то

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i,$$

а значит, в оптимальном решении i-тый ресурс будет использован полностью, будет *дефицитен*. Если же

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* < b_i,$$

то $y_i^* = 0$, т.е. расход i-го ресурса будет строго меньше его запаса, то соответствующая переменная y_i^* будет равна нулю.

Таким образом, вектор двойственных оценок $y*$ показывает *дефицитность* ресурсов, их *скрытую цену*. Если двойственная оценка ресурса больше нуля, то ресурс является дефицитным. Если ресурс является избыточным, недефицитным, то его двойственная оценка равна нулю. Кроме того, величину y_i^* можно интерпретировать как цену, которую предприятие готово заплатить за увеличение на одну единицу запаса i-го ресурса.

Матрица A^T – это транспонированная технологическая матрица A, поэтому матрица A^T также состоит из норм затрат ресурсов в натуральных единицах измерения на различные виды продукции. Если мы умножим нормы затрат ресурсов A^T на их цену $y*$, то получим $A^T y*$ – скрытую стоимость выпуска одной единицы каждого вида продукции.

Если

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* > c_j ,$$

то $x_j^* = 0$, т.е. если *скрытая стоимость 1 единицы j-го вида продукции*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*$$

превосходит доход от одной единицы j-го вида продукции c_j, то выпускать этот продукт не имеет смысла, поэтому объем его выпуска будет нулевым $x_j^* = 0$.

Если $x_j^* > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* = c_j ,$$

что означает, если объем выпуска j-го вида продукции больше нуля $x_j^* > 0$, то скрытая стоимость 1 единицы j-го вида продукции

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*$$

соответствует доходу от одной единицы j-го вида продукции c_j.

Величина (c, x^*) показывает максимально возможный доход, который измеряется в денежных единицах. По первой теореме двойственности $(c, x^*) = (b, y^*)$, поэтому величина (b, y^*) также является стоимостным показателем. Умножив величину запаса на его скрытые цены, мы получим общую скрытую стоимость запасов ресурсов (b, y). Таким образом, суть целевой функции двойственной задачи по валу – это минимизация общих скрытых затрат на ресурсы.

Аналогичным образом можно *интерпретировать* другие *двойственные задачи линейного программирования*. При этом нужно учесть следующее:

1. Каждому виду ограничений соответствует определенная группа двойственных переменных, которые будут показывать дефицитность данных ограничений.

2. Целевая функция прямой задачи и целевая функция двойственной задачи имеют одинаковые единицы измерения.

3. Суть матрицы коэффициентов при ограничениях прямой задачи при транспонировании практически не изменяется.

4. Произведение матрицы коэффициентов при ограничениях прямой задачи на двойственные переменные даёт величины, которые измеряются в тех же единицах измерения, что и коэффициенты целевой функции прямой задачи.

Если оптимальное значение прямой задачи рассматривать как функцию правой части системы ограничений $\max_x (c,x) = \varphi(b)$, то имеет место

Теорема. *Пусть* $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ – *невырожденное оптимальное решение задачи линейного программирования, двойственной задаче* $\max\left\{(c,x) : Ax \le b^0\right\}$. *Тогда* $y^* \in \nabla\varphi\left(b^0\right)$.

В соответствии с теоремой при малом изменении запаса i-го ресурса на величину Δb_i максимальная прибыль $\max_x (c,x)$ изменится на величину, не превышающую $\Delta b_i \cdot y_i^*$.

При одновременном малом изменении запасов всех ресурсов на величину $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, ..., \Delta b_n)$ оценка изменения максимальной прибыли составит $\Delta Z = (\Delta b, y^*)$. Требование «малого изменения» означает, что в результате изменения запасов некоторых ресурсов не будет меняться структура оптимального решения.

3. Прямые методы решения задач линейного программирования

3.1. Симплекс-метод

Идея симплекс-метода, принадлежащая Фурье (1826 г.), состоит в организации движения по ребрам полиэдра от вершины к вершине, пока не будет достигнута оптимальная вершина. Современная формализация данного метода принадлежит Канторовичу (1948 г.) и Данцигу (1951 г.). Он основан на расчете симплекс-таблиц.

Перед проведением симплекс-метода преобразуем задачу в каноническую задачу на максимум.

$$\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\} \tag{12}$$

Пусть A – $(m \times n)$ матрица $m < n$. Тогда размерность полиэдра задачи равна $n - m$. Пусть $x^{(k)}$ – вершина полиэдра задачи, $C^{(k)}$ – множество ограничений-неравенств на неотрицательность, активных в точке $x^{(k)}$. Мощность множества $C^{(k)}$ не меньше $n - m$, $\tilde{A}^{(k)} = \left\{i, x_i^{(k)} = 0\right\}$ подмножество столбцов матрицы A. Квадратную невырожденную $(n \times n)$-матрицу $B^{(k)}$, являющуюся подматрицей A, содержащей все столбцы, не вошедшие в множество $\tilde{A}^{(k)} = \left\{i, x_i^{(k)} = 0\right\}$, называют *базисной матрицей*. Переменные $x_i^{(k)}$, для которых соответствующие столбцы A входят в $B^{(k)}$, называют *текущими базисными переменными*, а остальные переменные – *текущими небазисными переменными*. Множество текущих базисных переменных образует *текущий базис*. ***Симплекс-таблицей***, ассоциированной с $B^{(k)}$, называется блочная матрица вида

$$S^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} u^{(k)} = -c + c_B {B^{(k)}}^{-1} A & (c, x^{(k)}) \\ \hline A^{(k)} = {B^{(k)}}^{-1} A & x_B^{(k)} = {B^{(k)}}^{-1} b \end{array}\right].$$

Дадим интерпретацию основных элементов симплекс-таблицы

$u^{(k)} = -c + c_B {B^{(k)}}^{-1} A$ – вектор-строка невязок ограничений двойственной задачи, где c_B – часть вектора c, соответствующая $B^{(k)}$. Данный вектор можно рассматривать как вектор объективно-обусловленных оценок условий неотрицательности.

$A^{(k)} = {B^{(k)}}^{-1} A$ – матрица, столбцы которой представляют векторы коэффициентов разложения столбцов матрицы A по столбцам матрицы $B^{(k)}$. Столбцам матрицы A, вошедшим в базисную матрицу будут соответствовать единичные орты в ${B^{(k)}}^{-1} A$.

$x_B^{(k)} = b^{(k)} = {B^{(k)}}^{-1} b$ представляет вектор коэффициентов разложения вектора b по базису. Координаты $({B^{(k)}}^{-1} b)_i$ данного вектора численно равны значениям $x_j^{(k)}$ соответствующих базисных столбцов, имеющих единицу в i-той строке ${B^{(k)}}^{-1} A$.

$cx^{(k)}$ – значение целевой функции в текущей вершине $x^{(k)}$ полиэдра задачи (12).

3.1.1. *Симплекс-алгоритм*

k -ая итерация алгоритма.

1. Если $u^{(k)} \geq 0$, то $x^{(k)}$ – оптимальная вершина. *Останов*.

2. Если $u^{(k)} \ngeq 0$, то выбираем минимальный индекс i^k: $u^{(k)}_{i^k} < 0$. Ясно, что переменная x_{i^k} является небазисной. Необходимо ее перевести в число базисных переменных. Это соответствует вводу i^k-го столбца матрицы $A^{(k)}$ в число базисных. Следовательно, фигурирующий в описании симплекс-алгоритма вектор $y = (B^{(k)^{-1}} A)_{i^k}$, т.е. i^k -му столбцу матрицы $A^{(k)}$. Очередная вершина полиэдра задачи (12) равна $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda y$, где λ – максимальное число, для которого $x^{(k+1)}$ допустим. Поэтому λ – это максимальное положительное число, удовлетворяющее неравенству $x_B^{(k)} \geq \lambda y$, т.е.

$$\lambda = \min\left\{ \frac{(x_B^{(k)})_t}{(A_{i^k}^{(k)})_t} : \quad t = 1,2,...,m, \quad (A_{i^k}^{(k)})_t > 0 \right\}. \qquad (13)$$

3. Если минимум в (13) не существует, то максимум не ограничен и y - луч допустимой области с $cy > 0$. Останов.

4. Пусть минимум в (13) достигается при $t = t^{(k)}$. Применяя преобразование Жордана-Гаусса преобразуем i^k -й столбец матрицы $A^{(k)}$ в орт с единицей в строке $t = t^{(k)}$. Очевидно , что из базиса будет выведена переменная с единицей в строке $t^{(k)}$ матрицы $A^{(k)}$. Эта ведущая операция не изменяет $m-1$ единичных ортов, соответствующих базисным векторам, отличным от $t^{(k)}$.

Перейти к выполнению $(k+1)$-ой итерации.

Описание симплекс-алгоритма в табличной форме завершено.

3.1.2. *Пример*

Пусть дана задача линейного программирования

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Найти её решение симплекс-методом.

Решение

Введем дополнительные переменные $x_3, x_4, x_5 \ge 0$, чтобы преобразовать задачу к каноническому виду

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Нулевая итерация ($k = 0$)

Перед составлением первой симплекс-таблицы учтем, что вектор коэффициентов целевой функции $c = (1; 3; 0; 0; 0)$, матрица A коэффициентов при переменных в ограничениях и вектор правой части ограничений b

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Базисными переменными будут (x_3, x_4, x_5), для которых их значение равно правой части ограничений $(x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 5)$, коэффициенты целевой функции $c_B = (0; 0; 0)$, а матрица коэффициентов в ограничениях для этих базисных переменных $B^{(0)}$ и обратная к ней матрица $B^{(0)^{-1}}$ равны

$$B^{(0)} = B^{(0)^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B^{(0)^{-1}}A = A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор $B^{(0)^{-1}}b = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, и вектор $-c + c_B B^{(0)^{-1}} A = (-1; -2; 0; 0; 0)$.

Небазисные переменные (x_1, x_2) будут равны нулю, т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Таким образом, задача может быть представлена в виде следующей симплекс-таблицы.

	x_1	x_2	$\boxed{x_3}$	$\boxed{x_4}$	$\boxed{x_5}$	
L_0	-1	-2	0	0	0	0
L_1	-3	2	1	0	0	2
L_2	-1	2	0	1	0	4
L_3	1	1	0	0	1	5

Начальное решение $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ z = 0)$ не является оптимальным, поскольку среди элементов строки L_0 есть отрицательные значения (для x_1 и x_2). Поэтому необходимо ввести в базис одну из этих переменных. Введем в базис x_1, так как её индекс минимальный. Рассчитаем значения $\mathrm{col}\left(\dfrac{(x_B{}^{(0)})_t}{(A_1{}^{(0)})_t} : t = 1,2,3\right) = \begin{pmatrix} 2/(-3) \\ 4/(-1) \\ 5/1 \end{pmatrix}$.

Единственное положительное значение равно 5, поэтому $\ell = 5$, а $t^{(0)} = 3$.

Таким образом, из базиса выводится переменная x_5 и соответствующий ей столбец. Далее выполним ведущее преобразование Жордана-Гаусса. В нашем случае ведущее преобразование будет $L_0' = L_0 + L_3$; $L_1' = L_1 + 3L_3$; $L_2' = L_2 + L_3$; $L_3' = L_3$. Отсюда получаем новую симплекс-таблицу.

	$\boxed{x_1}$	x_2	$\boxed{x_3}$	$\boxed{x_4}$	x_5	
L_0	0	-1	0	0	1	5
L_1	0	5	1	0	3	17
L_2	0	3	0	1	1	9
L_3	1	1	0	0	1	5

Первая итерация ($k = 1$)

Полученное новое базисное решение

$$(x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 17, x_4 = 19, x_5 = 5, z = 5)$$

не является оптимальным, так как среди элементов строки L_0 есть отрицательное значение (-1) при переменной x_2. Тогда нужно ввести переменную x_2 в базис. Рассчитаем значения $\operatorname{col}\left(\dfrac{(x_B{}^{(1)})_t}{(A_2{}^{(1)})_t} : t = 1,2,3 \right) = \begin{pmatrix} 17/5 \\ 9/3 \\ 5/1 \end{pmatrix}$.

Минимальное положительное значение равно 3, т.е. $\lambda = 3$ и $t^{(1)} = 2$, значит, из базиса выводится переменная x_4. Проведем ведущее преобразование для второго столбца симплекс-таблицы.

$$L_0' = L_0 + \frac{1}{3}L_2;\ L_1' = L_1 - \frac{5}{3}L_2;\ L_2' = \frac{1}{3}L_2;\ L_3' = L_3 - \frac{1}{3}L_2.$$

Тогда получаем третью симплекс-таблицу.

	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$\boxed{x_3}$	x_4	x_5	
L_0	0	0	0	$1/3$	$4/3$	8
L_1	0	0	1	$-5/3$	$4/3$	2
L_2	0	1	0	$1/3$	$1/3$	3
L_3	1	0	0	$-1/3$	$2/3$	2

Все оценки в строке L_0 для этой симплекс-таблицы неотрицательны, поэтому найденное решение $(x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0, z = 8)$ оптимально.

3.2. Метод искусственного базиса

Перед применением симплекс-метода нужно получить начальное базисное решение, т.е. рассчитать матрицу $S^{(0)}$, что иногда является сложной задачей. Поэтому используют метод искусственного базиса.

Пусть дана каноническая задача линейного программирования на максимум, которую называют *основной* задачей. Строим к ней еще одну задачу, называемую *вспомогательной*.

Рассматриваем систему ограничений основной задачи, меняя знаки у обеих частей уравнений таким образом, чтобы свободные члены всех ограничений были неотрицательными.

К тем ограничениям, в которых нет базисных переменных, добавляем в левую часть по одной новой неотрицательной переменной, которую называют *искусственной.*

Составляем новую целевую функцию Z_1, равную сумме всех искусственных переменных с отрицательным знаком. Её необходимо максимизировать.

Далее решаем эту вспомогательную задачу обычным симплекс-методом. Если в результате решения $\max\limits_{x} Z_1 \neq 0$, то делаем вывод, что основная задача не имеет решения. Если же $\max\limits_{x} Z_1 = 0$, то решаем основную задачу, взяв для её решения симплекс-таблицу, полученную в результате решения вспомогательной задачи, исключив из нее столбцы, соответствующие вспомогательным переменным.

При решении вспомогательной задачи можно не вычислять элементы столбцов соответствующих базисных переменных после их выхода из базиса.

3.2.1. *Пример*

Решить следующую задачу линейного программирования

$$z = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Так как $b_1 = -4$ имеет отрицательное значение, умножим первое уравнение на (-1). Тогда оно будет иметь вид $-3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 4$. Введем две дополнительные неотрицательные переменные x_4 и x_5 для искусственного базиса. Коэффициенты в целевой функции вспомогательной задачи для этих переменных будут соответственно -1 и -1. Прибавим к левой части первого уравнения x_4, а x_5 – ко второму. Тогда вспомогательная задача будет иметь вид

$$S = -x_4 - x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_5 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вектор коэффициентов целевой функции для этой задачи равен $c = (0; 0; 0; -1; -1)$. Матрица A коэффициентов при переменных в ограничениях и вектор правой части ограничений b будут

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Начальными базисными переменными будут x_4 и x_5, для которых их значение равно правой части ограничений $(x_4 = 4, x_5 = 2)$, коэффициенты целевой функции $c_B = (-1; -1)$, $S = -6$, а матрица коэффициентов в ограничениях для этих базисных переменных $B^{(0)}$ и обратная к ней матрица $B^{(0)^{-1}}$ равны $B^{(0)} = B^{(0)^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $B^{(0)^{-1}} A = A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а вектор $B^{(0)^{-1}} b = b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, вектор оценок невязок

$$u^{(0)} = -c + c_B B^{(0)^{-1}} A = (0\,;0;0;1;1) + (-1;-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2; 2; -2; 0; 0).$$

Небазисными переменными будут x_1, x_2 и x_3. Таким образом, начальная симплекс-таблица будет иметь следующий вид

	x_1	x_2	x_3	$\boxed{x_4}$	$\boxed{x_5}$	
L_0	2	2	-2	0	0	-6
L_1	-3	-4	8	1	0	4
L_2	1	2	-6	0	1	2

Начальное решение $(x_1 = 0, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 0, \;\; x_4 = 4, \;\; x_5 = 2, \;\; S = -6)$ не является оптимальным, поскольку среди элементов строки L_0 есть отрицательное значение для x_3. Поэтому нужно ввести в базис x_3. Рассчитаем значения

$$\mathrm{col}\left(\frac{(x_B{}^{(0)})_t}{(A_1^{(0)})_t} : t = 1,2 \right) = \begin{pmatrix} 4/8 \\ 2/(-6) \end{pmatrix}.$$

Единственное положительное значение равно $1/2$, поэтому $\lambda = 1/2$, а $t^{(0)} = 1$. Таким образом, из базиса выводится переменная x_4

и соответствующий ей столбец. Далее выполним ведущее преобразование Жордана-Гаусса, получим вторую симплекс-таблицу.

	x_1	x_2	$\boxed{x_3}$	x_4	$\boxed{x_5}$	
L_0	$5/4$	1	0	$1/4$	0	-5
L_1	$-3/8$	$-1/2$	1	$1/8$	0	$1/2$
L_2	$-5/4$	-1	0	$3/4$	1	5

Все элементы строки L_0 для переменных x положительны, симплекс-алгоритм для вспомогательной задачи закончен. Однако значение целевой функции оказалось меньше нуля $Z_1 = -5$, поэтому у основной задачи нет допустимого решения.

3.2.2. *Пример*

Найти оптимальное решение задачи

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1,\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Решение

Сначала приведем её к каноническому виду

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Во втором ограничении можно использовать переменную x_5 в качестве базисной, а в первое уравнение нужно добавить неотрицательную искусственную переменную x_6. Тогда получим следующую вспомогательную задачу.

$$Z_1 = -x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Вектор коэффициентов целевой функции для этой задачи равен $c = (0; 0; 0; 0; 0; -1)$. Матрица A коэффициентов при переменных в ограничениях и вектор правой части ограничений b будут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Начальными базисными переменными будут $x_6 = 1$ и $x_5 = 4$. Их коэффициенты в целевой функции будут $c_B = (-1; 0)$, а значение $S = -1$. Матрица коэффициентов в ограничениях для этих базисных переменных $B^{(0)}$ и обратная к ней матрица $B^{(0)^{-1}}$ равны $B^{(0)} = B^{(0)^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $B^{(0)^{-1}} A = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, а вектор $B^{(0)^{-1}} b = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, вектор оценок невязок

$$u^{(0)} = -c + c_B B^{(0)^{-1}} A = (0; 0; 0; 0; 0; -1) + (-1; 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= (-1; 2; -1; 1; 0; 0).$$

Небазисными переменными будут x_1, x_2, x_3 и x_4. Таким образом, начальная симплекс-таблица будет иметь следующий вид.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boxed{x_5}$	$\boxed{x_6}$	
L_0	-1	2	-1	1	0	0	-1
L_1	1	-2	1	-1	0	1	1
L_2	1	1	-1	0	1	0	4

Начальное решение

$$(x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 0,\quad x_4 = 0,\quad x_5 = 4,\quad x_6 = 1,\quad S = -1)$$

не является оптимальным, поскольку среди элементов строки L_0 есть отрицательные значения для x_1 и x_3. Введем в базис переменную x_1, так как её индекс минимальный. Рассчитаем значения $\mathrm{col}\left(\dfrac{(x_B{}^{(0)})_t}{(A_1{}^{(0)})_t} : t = 1,2 \right) = \begin{pmatrix} 1/1 \\ 4/1 \end{pmatrix}$.

Минимальное положительное значение равно 1, поэтому $\lambda = 1$, а $t^{(0)} = 1$. Таким образом, из базиса выводится переменная x_6 и соответствующий ей столбец. Далее выполним ведущее преобразование Жордана-Гаусса, получим вторую симплекс-таблицу.

	$\boxed{x_1}$	x_2	x_3	x_4	$\boxed{x_5}$	x_6	
L_0	0	0	0	0	0	1	0
L_1	1	-2	1	-1	0	1	1
L_2	0	3	-2	1	1	-1	3

Все значения в строке L_0 неотрицательны, поэтому найденное базисное решение для вспомогательной задачи является оптимальным. Значение целевой функции равно $Z_1 = 0$, следовательно, основная задача имеет решение. Из второй симплекс-таблицы вспомогательной задачи получаем, что начальными базисными переменными для основной задачи будут $x_1 = 1$ и $x_5 = 3$, матрица $B^{(1)^{-1}} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, вектор $B^{(1)^{-1}} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Коэффициенты целевой функции основной задачи равны $c = (2; 3; -3; 0; 0)$, $c_B = (2; 0)$, откуда вектор невязок ограничений будет

$$u^{(1)} = -c + c_B B^{(1)^{-1}} A =$$

$$= -(2; 3; -3; 0; 0) + (2; 0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0; -7; 5; -2; 0).$$

Значение целевой функции для начального базисного решения составляет $z = 2 * 1 = 2$. Таким образом, третья симплекс-таблица будет иметь вид

	$\boxed{x_1}$	x_2	x_3	x_4	$\boxed{x_5}$	
L_0	0	-7	5	-2	0	2
L_1	1	-2	1	-1	0	1
L_2	0	3	-2	1	1	3

Найденное решение $(x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3,\ z = 2)$ не является оптимальным, поскольку среди элементов строки L_0 есть отрицательные значения для x_2 и x_4. Введем в базис переменную x_2, так как её индекс минимальный. Рассчитаем значения $\mathrm{col}\left(\dfrac{(x_B{}^{(2)})_t}{(A_1{}^{(2)})_t} : t = 1,2 \right) = \begin{pmatrix} 1/(-2) \\ 3/3 \end{pmatrix}$. Единственное положительное значение равно 1, поэтому $\ell = 1$, а $t^{(2)} = 2$. Таким образом, из базиса выводится переменная x_5 и соответствующий ей столбец. Далее выполним ведущее преобразование Жордана-Гаусса, получим четвертую симплекс-таблицу.

	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	x_3	x_4	x_5	
L_0	0	0	1/3	1/3	7/3	9
L_1	1	0	-1/3	-1/3	2/3	3
L_2	0	1	-2/3	1/3	1/3	1

Все значения в строке L_0 неотрицательны, поэтому найденное решение ($x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $z = 9$) для основной задачи является оптимальным.

3.3. Модифицированный симплекс-метод (метод обратной матрицы)

Основное достоинство симплекс-метода в табличной форме состоит в простоте его программирования. Однако в ходе вычислений каждая его итерация состоит в пересчете всей таблицы, т.е. имеет вычислительную сложность порядка $O(mn)$. С другой стороны при выполнении симплекс-алгоритма нет необходимости в информации обо всей симплекс-таблице, поскольку сама симплекс-таблица и операции над ней полностью определяются:

1) базисной матрицей

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \dots & b_{1n}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \dots & b_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \dots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix};$$

2) вектором y объективно-обусловленных оценок активных ограничений, определяемом как решение системы $y^T B^{(k)} = c^T$;

3) вектором g коэффициентов разложения вводимого в базис столбца A_j по столбцам предыдущего базиса, определяемом как решение системы $B^{(k)} g = A_j$;

4) вектором x текущих базисных переменных равных коэффициентам разложения столбца b по базисным столбцам, определяемом как решение системы $B^{(k)} x = b$.

Данные векторы и величины легко вычисляются, если известна матрица

$$B^{(k)^{-1}} = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(k)} & \beta_{12}^{(k)} & \ldots & \beta_{1n}^{(k)} \\ \beta_{21}^{(k)} & \beta_{22}^{(k)} & \ldots & \beta_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1}^{(k)} & \beta_{n2}^{(k)} & \ldots & \beta_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

обратная к матрице $B^{(k)}$. В рассмотренном алгоритме на каждом шаге в матрице $B^{(k)}$ изменяется только один столбец. Благодаря этому обратную матрицу для очередного шага можно получить с помощью простых преобразований элементов обратной матрицы текущего шага.

Теорема. *Пусть неособенные матрицы $B = (b_{ik})$ и $B' = (b'_{ik})$ одного порядка n отличаются лишь одним столбцом с номером r, т.е. $(\forall k \ne r, \forall i : b_{ik} = b'_{ik})$. Тогда элементы обратной матрицы вычисляются через элементы обратной матрицы $B^{-1} = (\beta_{ik})$ следующим образом*

$$\beta'_{ik} = \begin{cases} \beta_{ik} - \dfrac{g_i}{g_r}\beta_{rk}, & \text{если } i \ne r, \\ \dfrac{1}{g_r}\beta_{rk}, & \text{если } i = r, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$g_i = \sum_{s=1}^{n} \beta_{is} b'_{sr}, \; i = 1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

3.4. Модифицированный симплекс-алгоритм.

k-тая итерация алгоритма. Пусть $\sigma^{(k)}$ – множество базисных переменных, $B^{(k)^{-1}}$ - матрица, обратная базисной, $x_{B^{(k)}} = B^{(k)^{-1}} b$, $y^{(k)^T} = c_{B^{(k)}} B^{(k)^{-1}}$, $u^{(k)} = -c + y^T A$.

- Если $u^{(k)} \ge 0$, то $x^{(k)}$ – оптимальная вершина. Останов.
- Если $u^{(k)} \ngeq 0$, то выбираем минимальный индекс i^k такой, что $(u^{(k)})_{i^k} < 0$. Это соответствует вводу i^k-того столбца матрицы A в число базисных. Определяем коэффициенты разложения данного столбца по базису $g = B^{(k)^{-1}} A_{i^k}$, после чего находим

$$\lambda = \min\left\{ \frac{(x_{B^{(k)}})_t}{(y^{(k)})_t} : \; t = 1,2,\ldots,m, \;\; (x_{B^{(k)}})_t > 0 \right\}. \tag{16}$$

- Если минимум в (16) не существует, то максимум не ограничен. Останов.
- Пусть минимум в (16) достигается при $t = t^{(k)}$ и $t^{(k)}$-тый столбец матрицы $B^{(k)}$ является j^k-тым столбцом матрицы A. Если таких $t^{(k)}$-тых несколько, то выбираем такое $t^{(k)}$, которому соответствует минимальное значение j^k. Матрица $B^{(k+1)}$ получается из $B^{(k)}$ заменой столбца $t^{(k)}$ столбцом $i^{(k)}$ матрицы A. Матрица $B^{(k+1)^{-1}}$, обратная $B^{(k+1)}$, получается из матрицы $B^{(k)^{-1}}$ с помощью формул (14) и (15).
- Перейти к выполнению $(k+1)$-ой итерации.

Описание алгоритма завершено.

Метод обратной матрицы лучше всего применять в следующих ситуациях:

1. Число переменных n существенно больше числа ограничений m;
2. Матрица A сильно разрежена (в ней много нулевых элементов);
3. Требуется найти решение и прямой, и двойственной задачи.

Заметим, что данным требованиям удовлетворяют задачи о потоках в сетях.

4. Инструментальные средства решения задач линейного программирования

Расчет симплекс-таблиц является сложной рутинной процедурой, в ходе выполнения которой высока вероятность счетной ошибки со стороны человека. Ведь умножать и вычитать дроби, образующиеся при жордановых преобразованиях, совсем непросто. В настоящее время разработано достаточно много *программ*, позволяющих найти оптимальное решение для задач линейного программирования (например, надстройка «Поиск решения» Solver для MS Excel, программы Storm, TORA и др.). Отчеты с анализом полученного решения, формируемые программами, настолько же подробны, что и симплекс-таблицы. Среди преимуществ применения программ можно выделить следующие:

1. Существенное *сокращение времени*, требуемое для выполнения расчетов. Скорость выполнения расчетов компьютером существенно выше по сравнению с человеком.

2. Снижение числа *ошибок*. Не нужно выполнять вручную расчет симплекс-таблиц, однако возможны ошибки при вводе исходных данных в программу.

3. Увеличение *скорости модификации.* Достаточно просто изменить цифры, формулы или ограничения, а затем запустить оптимизацию.

4. Простота *распространения*.

Тем не менее, нужно помнить, что при машинном расчете могут накапливаться *ошибки округления*, что может отрицательно сказаться на качестве решения.

4.1. Применение надстройки «Поиск решения»

Надстройка Поиск решения (Solver) – это надстройка, входящая в поставку Excel, предназначенная для оптимизации моделей при наличии ограничений. Для этого в надстройке используются методы и алгоритмы математического программирования, которые позволяют находить оптимальные решения для табличных моделей. Для задач линейного программирования Поиск решения использует достаточно эффективный симплекс-метод. Если оптимизируется линейная модель в MS Excel, важно, чтобы линейными были все формулы, которые содержат ссылки на переменные решения и при этом прямо или косвенно влияют на формулы для целевой функции и ограничений.

Чтобы вызвать Поиск решения, нужно выбрать меню Сервис/Поиск Решения. Надстройка Поиск решения, хотя и входит в поставку Excel, не подключается автоматически к этой программе. Поэтому если в меню Сервис отсутствует команда Поиск решения, значит, настройка не подключена. Для её подключения в MS Office 2003 выберите команду Сервис/ НаДстройки и в открывшемся диалоговом окне Надстройки установите флажок перед опцией Поиск решения. При подключении надстройки может понадобиться установочный диск MS Excel и права администратора.

Надстройка Поиск решения состоит из двух программных компонентов. Первая – это встроенная в Excel программа, написанная на языке Visual Basic (`SOLVER.XLA`), которая транслирует представленную на рабочем листе информацию во внутренне представление, используемое второй программой. Вторая программа находится в памяти компьютера в виде отдельного программного модуля (`SOLVER32.DLL`); именно она выполняет оптимизацию и возвращает найденное решение первой программе, которая в свою очередь, обновляет данные на рабочем листе.

Когда выбирается команда Поиск решения в меню Сервис, происходит обращение к первой программе надстройки Поиск решения, которая подготавливает таблицу к оптимизации и вызывает вторую программу-оптимизатор.

Процесс построения модели линейного программирования в MS Excel можно разбить на **три этапа**.

1. *Написание и проверка символической модели.* Модель записывается на бумаге в математическом виде; это поможет при отладке окончательного варианта табличной модели в MS Excel.
2. *Создание и отладка табличной модели задачи.* На основе символической модели путем задания различных значений переменных решения с целью выявить возможные очевидные ошибки (например, для заведомо допустимых решений нарушаются ограничения, значения в ячейках левых частей или критерий эффективности некорректны и т.д.).
3. *Попытка оптимизации модели с помощью надстройки* Поиск решения (Solver). Если модель неправильно сформирована, результатом чаще всего будет сообщение об ошибке. Тогда нужно исправить модель, при этом возможно придется вернуться к первому этапу.

Для пользователей с небольшим опытом решения задач с помощью MS Excel можно дать следующие *рекомендации*.

- Перед решением задачи линейного программирования желательно привести её к стандартному специальному виду.
- Каждая переменная решения располагается в отдельной ячейке, ячейки группируются по столбцам или строкам; каждому ограничению отводится отдельная строка или столбец таблицы.
- Переменные решения группируются в отдельный блок столбцов/строк; аналогично ограничения группируются в свой блок строк/столбцов.
- Все ячейки, содержащие переменные решения и целевую функцию, имеют заголовки в верхней части своего столбца, а все ограничения имеют заголовки в крайней слева ячейке своей строки.
- Коэффициенты целевой функции хранятся в отдельном столбце/строке, располагаясь рядом с соответствующими переменными решения; формула для вычисления целевой функции находится в близлежащей ячейке.
- Чтобы модель была понятней, ячейки с переменными решения и целевой функцией выделяются рамкой по границе ячеек или заливкой ячеек.

- В каждой строке ограничений за ячейками, содержащими коэффициенты данного ограничения, следует ячейка, в которую записано вычисленное значение функции ограничения (значение левой части ограничения), за ней следует ячейка, в которой стоит соответствующий знак неравенства. Дополнительно может включаться ячейка с формулой вычисления резерва, т.е. разности между значениями левой и правой частей неравенства.
- Ячейки, содержащие правые части ограничений, должны включать константы или формулы, в которые не входят переменные решения. Все формулы в правой части, прямо или косвенно связанные с переменными решения, должны быть перенесены в левую часть неравенства в с помощью алгебраических преобразований данного неравенства.
- Не следует использовать в формулах модели линейного программирования функции Excel ЕСЛИ, ABS, MIN, MAX, СЛЧИС() и другие нелинейные функции.

Использование надстройки Поиск решения для решения задач линейного программирования можно представить в виде следующей **последовательности** этапов и шагов:

Этап 1. Создание математической *символьной модели* задачи линейного программирования, приведение её к стандартному специальному виду.

Этап 2. Запуск MS Excel.

Этап 3. Создание *оптимизационной модели* в MS Excel.

Шаг 3.1. Задать диапазон для *переменных* (выделить его цветом или рамкой), указать их первоначальные значения (т.е. нули). Подписать слева имя переменной. Справа указать, является ли она неотрицательной.

Шаг 3.2. Сформировать *матрицу коэффициентов* при переменных в *ограничениях*. Слева от строки ограничения подписать название ограничения.

Шаг 3.3. Рассчитать *левую часть ограничений,* разместить её правее матрицы коэффициентов ограничений. Для расчетов можно использовать функцию МУМНОЖ().

Шаг 3.4. Справа от левой части ограничений поставить знак для ограничений «>=», «<=» или «=».

Шаг 3.5. Справа от знака ограничения приписать *правую часть ограничения*.

Шаг 3.6. Ввести в столбец *коэффициенты целевой* функции. Этот столбец желательно разместить вблизи с соответствующими переменными.

Шаг 3.7. Рядом со столбцом с коэффициентами целевой функции записать *формулу* для расчета *целевой* функции (можно использовать функцию СУММПРОИЗВ()). Над этой формулой надписать название целевой функции, справа от формулы указать, является ли целевая функция на максимум или на минимум.

Этап 4. *Сохранение* рабочей *книги*, содержащей модель.

Этап 5. Выбор команды Поиск решения в меню Сервис.

Этап 6. Указание в *диалоговом окне* Поиск решения:

- ячейки содержащей формулу для *целевой функции*;
- *изменяемых* ячеек (ячеек, где находятся значения *переменных*);
- *ограничений*.

Этап 7. В диалоговом окне Поиск решения *установка опции* Линейная модель.

Этап 8. Начало оптимизации (щелчок на кнопке Выполнить).

Этап 9. Просмотр *сообщения о завершении* работы. Указать, нужно ли *заменить* первоначальные *значения переменных* найденными Поиском решения; создавать ли *отчет*.

Этап 10. Если получено оптимальное решение, то переход к этапу 11, иначе изменение модели и возврат к этапу 4.

Этап 11. *Сохранение* найденного решения.

Этап 12. Проанализировать, нужно ли *модифицировать* модель и повторно её оптимизировать. Если нужно, то переход к этапу 1, иначе сохранение модели и выход.

4.1.1. *Пример*

Решить с помощью Поиска решения следующую задачу.

$$Z = -5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \geq 0, \\ x_2 + x_4 + x_5 \leq 10, \\ x_3 \geq -1, \\ x_3 \leq 0, \\ 3x_1 + x_2 = x_5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Этап 1. Приведем задачу к специальному стандартному виду.

Во-первых, необходимо поменять знак у второго и четвертого ограничения. Во-вторых, у пятого ограничения перенести влево переменную x_5.

В результате получим такой вид модели.

$$Z = -5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \geq 0, \\ -x_2 - x_4 - x_5 \geq -10, \\ x_3 \geq -1, \\ -x_3 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Этап 2. Запустим MS Excel.

Этап 3. Сформируем оптимизационную модель в MS Excel.

Шаг 3.1. Зададим диапазон для *переменных*. Всего переменных в задаче пять: x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5. Все переменные, кроме x_3, неотрицательные (см. рис. 11).

Шаг 3.2. Сформируем *матрицу коэффициентов* при переменных в *ограничениях*. Всего пять ограничений и пять переменных, поэтому матрица будет иметь размер 5×5. В первом ограничении $x_1 + 2x_3 \geq 0$ коэффициент при x_1 равен 1, а при x_3 равен 2. Так как других переменных в ограничении нет (x_2, x_4, x_5), то их коэффициенты равны нулю. В итоге получили первую строку матрицы. Аналогично заполняются остальные строки матрицы ограничений.

Рис. 11. Создание массива для переменных

Рис. 12. Иллюстрация для шага 3.2

Шаг 3.3. Рассчитаем левую часть ограничений.

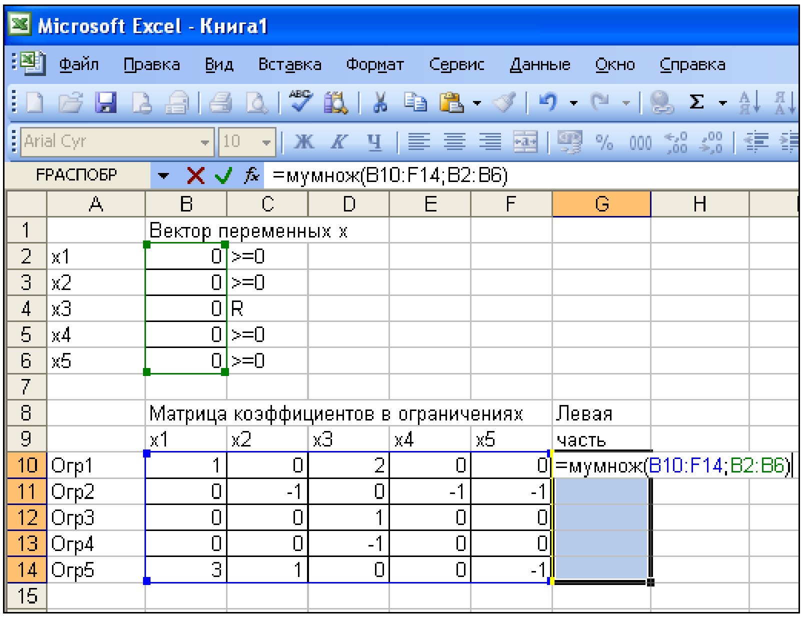


Рис. 13. Ввод формулы для левой части ограничений

Для этого в столбце левой части выделим число строк, равное числу ограничений, нажмем на «=» и введем функцию МУМНОЖ. Первым параметром функции указываем матрицу коэффициентов ограничений, вторым – значения переменных. Затем нажимаем F2, затем сочетание клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. В результате получим следующее (см. рис. 13 и 14).

	A	B	C	D	E	F	G
7							
8		Матрица коэффициентов в ограничениях					Левая
9		x1	x2	x3	x4	x5	часть
10	Огр1	1	0	2	0	0	0
11	Огр2	0	-1	0	-1	-1	0
12	Огр3	0	0	1	0	0	0
13	Огр4	0	0	-1	0	0	0
14	Огр5	3	1	0	0	-1	0

Рис. 14. Иллюстрация для шага 3.3

Шаги 3.4, 3.5. Отметим знак и запишем правую часть для каждого ограничения (см. рис. 15).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7									
8		Матрица коэффициентов в ограничениях					Левая		Правая
9		x1	x2	x3	x4	x5	часть	Знак	часть
10	Огр1	1	0	2	0	0	0	>=	0
11	Огр2	0	-1	0	-1	-1	0	>=	-10
12	Огр3	0	0	1	0	0	0	>=	-1
13	Огр4	0	0	-1	0	0	0	>=	0
14	Огр5	3	1	0	0	-1	0	=	0

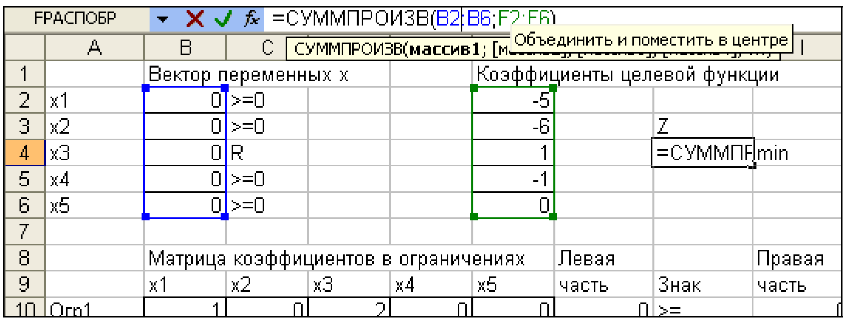
Рис. 15. Ввод правой части ограничений

Шаг 3.6. Введем коэффициенты для целевой функции (см. рис. 16). Отметим, что переменная x_5 отсутствует в целевой функции $Z = 5x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4$, поэтому её коэффициент равен нулю.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1		Вектор переменных x				Коэффициенты целевой функции			
2	x1	0	>=0			-5			
3	x2	0	>=0			-6			
4	x3	0	R			1			
5	x4	0	>=0			-1			
6	x5	0	>=0			0			
7									
8		Матрица коэффициентов в ограничениях					Левая		Прав
9		x1	x2	x3	x4	x5	часть	Знак	част
10	Огр1	1	0	2	0	0	0	>=	

Рис. 16. Ввод коэффициентов целевой функции

Шаг 3.7. Запишем *формулу* для расчета *целевой* функции.



ГРАСПОБР =СУММПРОИЗВ(B2:B6;F2:F6)

СУММПРОИЗВ(массив1; [м... Объединить и поместить в центре

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Вектор переменных x				Коэффициенты целевой функции			
2	x1	0	>=0			-5			
3	x2	0	>=0			-6		Z	
4	x3	0	R			1		=СУММПР	min
5	x4	0	>=0			-1			
6	x5	0	>=0			0			
7									
8		Матрица коэффициентов в ограничениях					Левая		Правая
9		x1	x2	x3	x4	x5	часть	Знак	часть
10	Огр1	1	0	2	0	0	0	>=	

Рис. 17. Ввод формулы целевой функции

Таким образом, общий вид модели в MS Excel следующий.

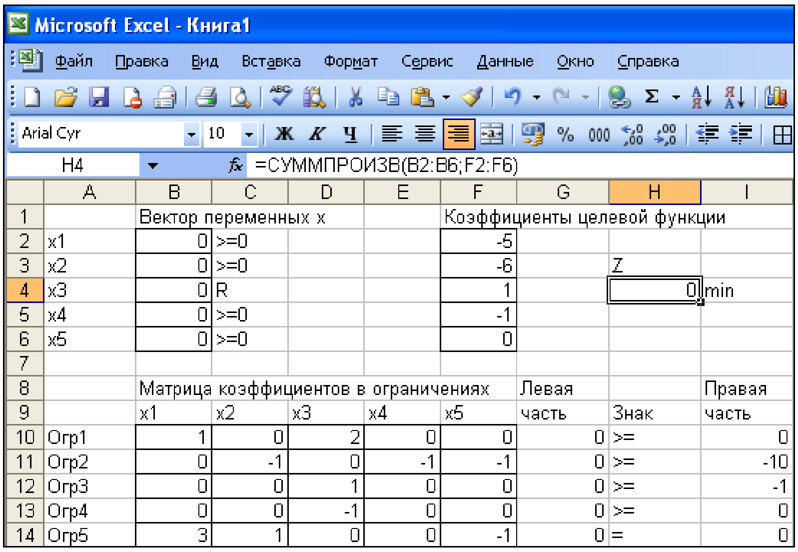


Рис. 18. Лист MS Excel с задачей

Этап 4. Сохраним книгу.

Этап 5. Выберем команду **Поиск решения** в меню **Сервис**.

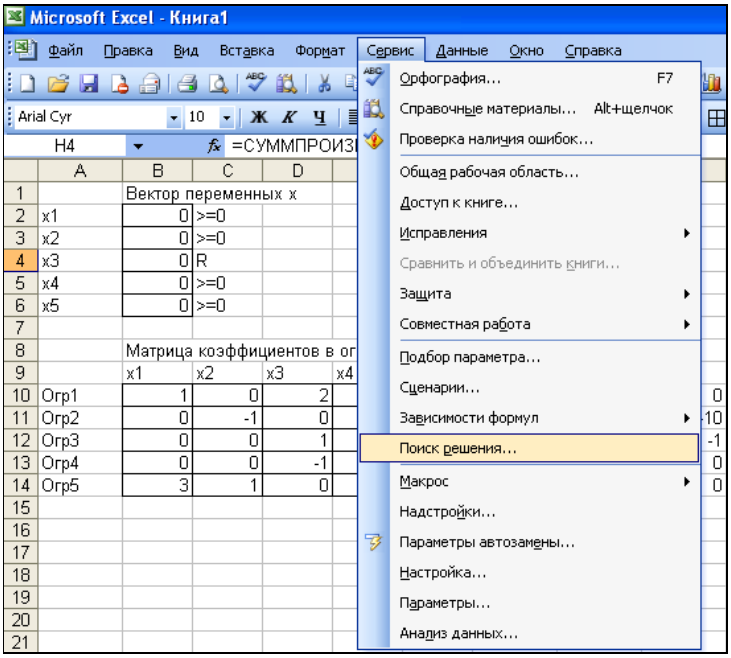


Рис. 19. Меню «Сервис»

Внешний вид диалогового окна **Поиска решения** будет таким.

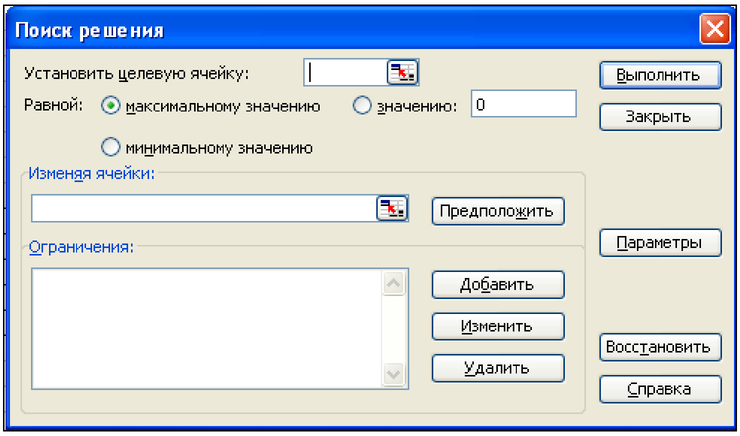
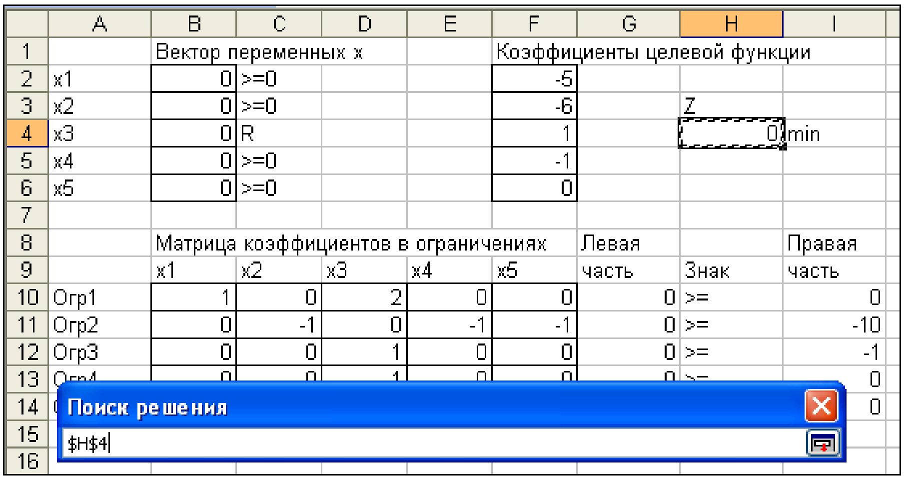


Рис. 20. Диалог «Поиск решения»

Этап 6. Введем модель в надстройку Поиск решения.

В поле Установить целевую ячейку вводится адрес ячейки, содержащей значение (формулу) целевой функции. Если щелкнуть на расположенной справа в поле ввода кнопке, диалоговое окно свернется так, что будет отображаться только текущее поле. Это позволяет удобнее указать адрес ячеек с помощью мыши.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Вектор переменных x				Коэффициенты целевой функции			
2	x1	0	>=0			-5			
3	x2	0	>=0			-6		Z	
4	x3	0	R			1		0	min
5	x4	0	>=0			-1			
6	x5	0	>=0			0			
7									
8		Матрица коэффициентов в ограничениях					Левая		Правая
9		x1	x2	x3	x4	x5	часть	Знак	часть
10	Огр1	1	0	2	0	0	0	>=	0
11	Огр2	0	-1	0	-1	-1	0	>=	-10
12	Огр3	0	0	1	0	0	0	>=	-1
13	Огр4	0	0	1	0	0	0	>=	0
14									0
15									
16									

Рис. 21. Выбор диапазона ячеек

Указав адрес целевой ячейки, отметим тип задачи на минимум.

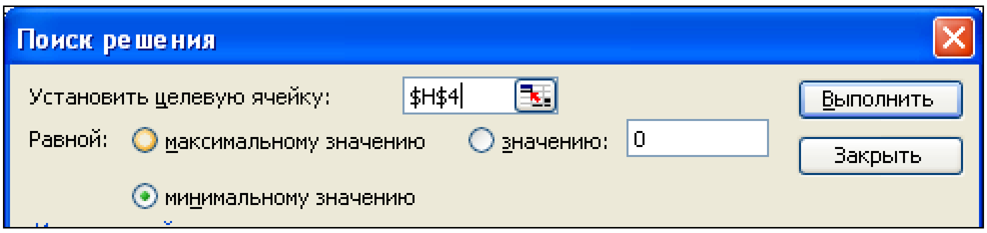


Рис. 22. Указание целевой функции

В поле **Изменяя ячейки** нужно указать диапазон, где находятся значения переменных. Можно указывать каждую переменную отдельно через точку запятой.

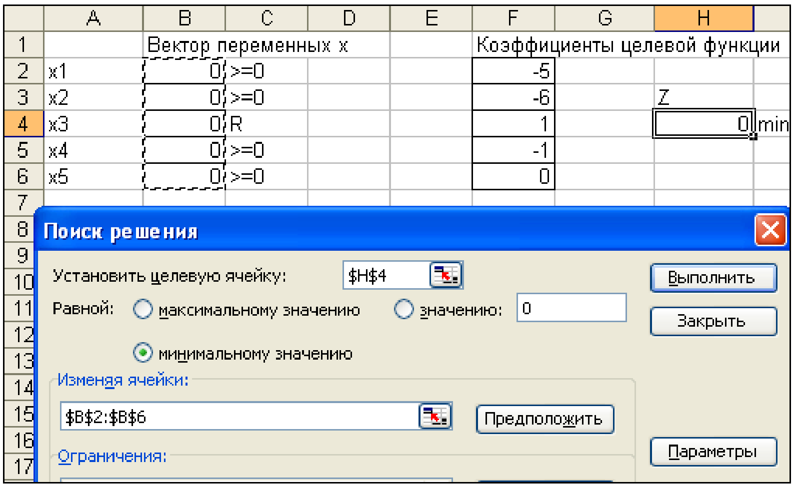


Рис. 23. Ввод диапазона для переменных

Теперь зададим для **Поиска решения** ограничения. Нажав на **Добавить**, мы откроем диалоговое окно **Добавление ограничения**. По умолчанию ограничение имеет вид неравенства со знаком «£».

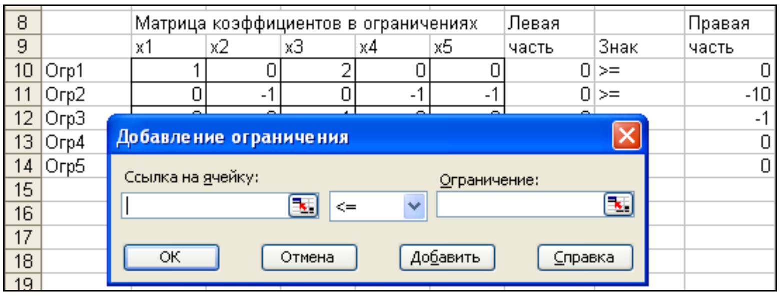


Рис. 24. Окно ввода ограничения

Если модель организована так, что неравенства одного знака расположены рядом, то их можно ввести все вместе, используя диапазоны ячеек. В нашем случае первые четыре ограничения имеют одинаковый знак.

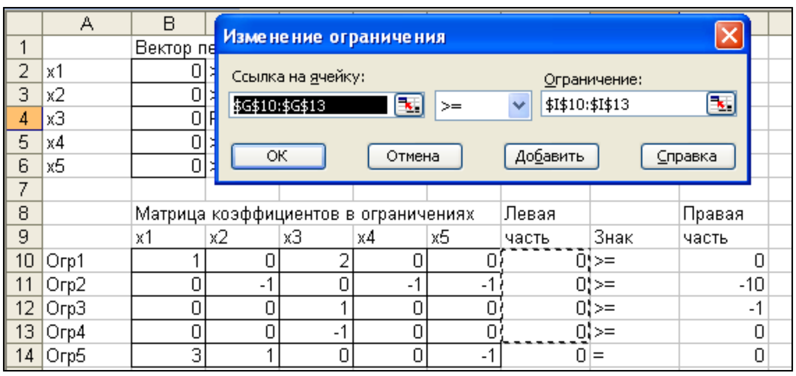


Рис. 25. Пример ввода ограничения

Если нажать на **ОК**, то появится диалоговое окно **Поиска решения**, в нижней половине которого будет показано данное ограничение.

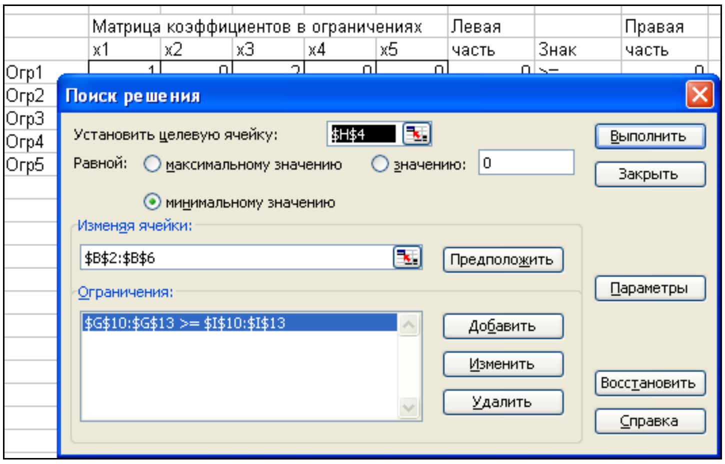


Рис. 26. Вид диалога «Поиск решения» после ввода ограничения

Кнопка **Отмена** в диалоговом окне **Добавление ограничения** позволяет не сохранять введенное ограничение. Кнопка **Добавление** в окне **Добавление ограничения** сохраняет введенное ограничение и позволяет продолжить ввод ограничений.

Далее введем последнее ограничение $3x_1 + x_2 - x_5 = 0$ и не забудем указать условия неотрицательности для переменных x_1, x_2, x_4, x_5. Тогда диалоговое окно будет иметь следующий вид.

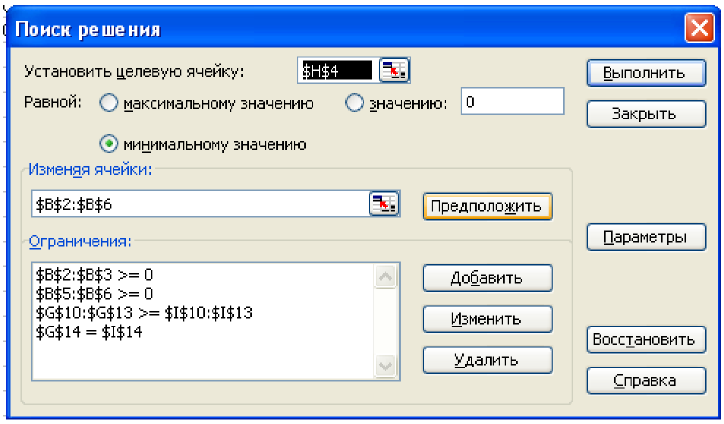


Рис. 27. Окончательный вид заполненного «Поиска решения»

Этап 7. В диалоговом окне **Поиск решения** установим опцию **Линейная модель**.

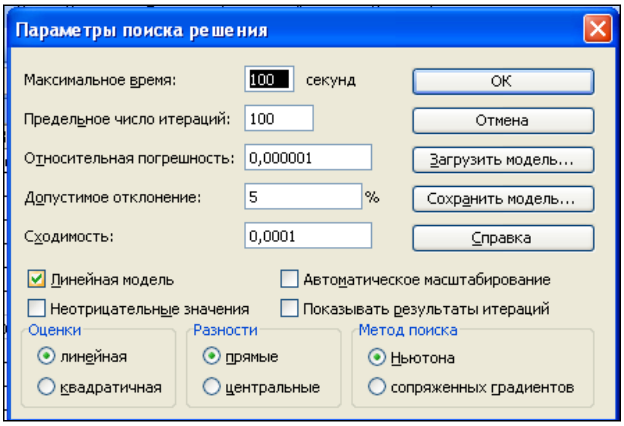


Рис. 28. Настройка параметров «Поиска решения»

Затем нажимаем на ОК. Снова вернемся в окно поиска решения.

Этап 8. Нажимаем кнопку Выполнить.

Этап 9. Через несколько секунд появится окно *сообщения о завершении* работы.

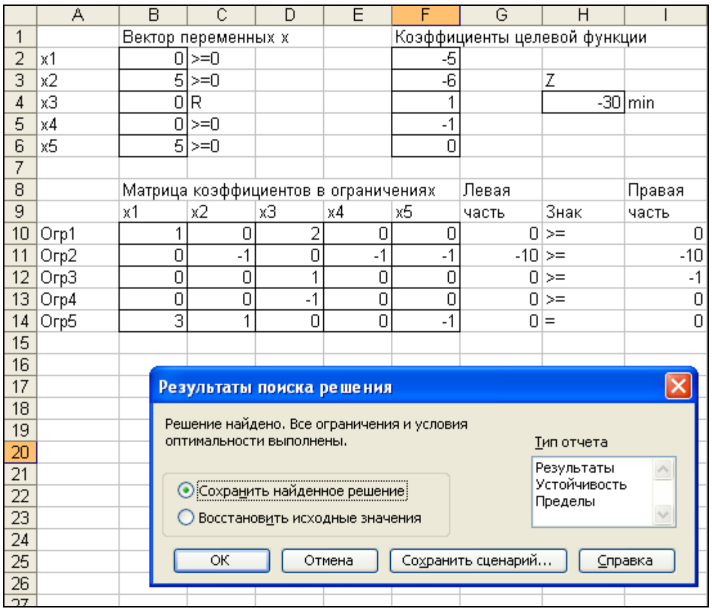


Рис. 29. Результаты «Поиска решения»

Как видим на рис. 29, значения x_2 и x_5 изменились, минимум целевой функции равен (-30). Нажмем на ОК, и найденное решение сохранится.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1. Общие задачи

5.1.1.

Нефтеперерабатывающий завод может использовать две различные технологии перегонки нефти для производства бензина, керосина и солярового масла. В следующей таблице приведены данные, показывающие выход продукции, отходы, издержки производства (стоимость нефти, заработная плата, амортизация и т.п.) и загрузку оборудования в расчете на 1 т переработанной нефти. Кроме того, указаны стоимость 1 т готовой продукции и суточный объем государственного заказа, который необходимо удовлетворить.

Наименование продукции	Выход продукции (т)		Стоимость 1 т готового продукта (руб.)	Суточный объем госзаказа (т)
	Технология 1	Технология 2		
Бензин	0,6	0,3	10000	117
Керосин	0,1	0,3	5000	54
Соляровое масло	-	0,3	2000	-
Отходы	0,3	0,1	-	-
Издержки производства (руб.)	*a*	*b*		
Загрузка оборудования (машино-ч)	0,2	0,05		

Ресурс оборудования составляет 75 машино-часов в сутки. Все отходы должны пройти через очистные сооружения, производительность которых составляет *c* т в сутки. Поставки нефти и спрос на всю продукцию завода неограниченны. Требуется составить суточный план производства с целью максимизации прибыли.

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	1300	3700	130	6	2100	3900	135	11	3700	4300	140	16	3900	4500	145
2	1500	3700	135	7	2300	3900	140	12	3900	4500	145	17	3100	4500	130
3	1700	3700	140	8	2500	3900	145	13	3700	4500	130	18	3700	4500	135
4	1900	3700	145	9	2900	4100	130	14	3500	4500	135	19	3500	4500	140
5	2100	3700	130	10	3100	4100	135	15	3300	4500	140	20	3300	4500	145

Ответы

	Объем пере-работки 1 техно-логией (т)	Объем пере-работки 2 техно-логией (т)	Общая прибыль (руб.)		Объем пере-работки 1 техно-логией (т)	Объем пере-работки 2 техно-логией (т)	Общая прибыль (руб.)
1	200	700	2020000	11	100	1100	1160000
2	150	900	2010000	12	360	60	972000
3	100	1100	2020000	13	360	60	1044000
4	50	1300	2050000	14	360	60	1116000
5	200	700	1860000	15	360	60	1188000
6	150	900	1740000	16	360	60	972000
7	100	1100	1740000	17	360	60	1260000
8	50	1300	1760000	18	360	60	1044000
9	200	700	1420000	19	360	60	1116000
10	150	900	1410000	20	360	60	1188000

5.1.2.

Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил. В следующей таблице указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на 1 т пряжи (т)		Количество сырья (т)
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	0,5	0,2	600
Капрон	*a*	0,6	*b*
Акрил	0,5-*a*	0,2	*c*
Прибыль от реализации 1 т пряжи (руб.)	55000	45000	

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

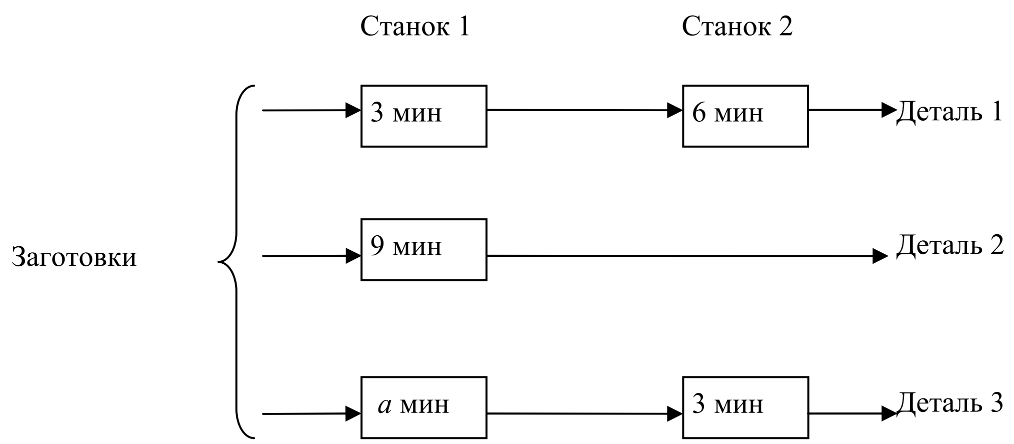
	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	0,1	620	500	6	0,1	870	510	11	0,2	710	400	16	0,3	690	300
2	0,1	730	500	7	0,1	790	520	12	0,2	880	410	17	0,3	720	300
3	0,1	840	500	8	0,2	920	400	13	0,2	810	410	18	0,3	750	300
4	0,1	650	510	9	0,2	850	400	14	0,2	740	410	19	0,3	780	300
5	0,1	760	510	10	0,2	780	400	15	0,3	660	300	20	0,3	800	300

Ответ

	Объем выпуска пряжи вида 1 (ед.)	Объем выпуска пряжи вида 2 (ед.)	Общая прибыль (руб.)		Объем выпуска пряжи вида 1 (ед.)	Объем выпуска пряжи вида 2 (ед.)	Общая прибыль (руб.)
1	800	900	16900000	11	700	950	16250000
2	700	1100	17600000	12	500	1300	17200000
3	600	1300	18300000	13	600	1150	16950000
4	800	950	17350000	14	700	1000	16700000
5	700	1150	18050000	15	1000	500	15500000
6	600	1350	18750000	16	1000	500	15500000
7	700	1200	18500000	17	1000	500	15500000
8	400	1400	17000000	18	1000	500	15500000
9	500	1250	16750000	19	1000	500	15500000
10	600	1100	16500000	20	1000	500	15500000

5.1.3.

Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на двух станках. На следующем рисунке показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени её обработки на станках.



Задан суточный ресурс рабочего времени каждого станка: b мин для станка 1 и c мин для станка 2. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 составляет 300, 100 и 200 рублей соответственно. Требуется составить суточный план производства деталей с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	3	600	900	6	5	840	450	11	5	870	900	16	4	870	450
2	3	960	600	7	3	660	900	12	5	930	450	17	5	630	270
3	3	510	750	8	3	960	510	13	3	720	900	18	3	600	750
4	4	690	450	9	4	600	900	14	3	960	420	19	4	720	900
5	5	660	900	10	4	780	450	15	4	660	900	20	4	750	360

Ответ

	Объем выпуска детали 1 (ед.)	Объем выпуска детали 2 (ед.)	Объем выпуска детали 3 (ед.)	Общий доход (руб.)		Объем выпуска детали 1 (ед.)	Объем выпуска детали 2 (ед.)	Объем выпуска детали 3 (ед.)	Общий доход (руб.)
1	100	0	100	50000	11	90	0	120	51000
2	0	40	200	44000	12	0	20	150	32000
3	80	0	90	42000	13	60	0	180	54000
4	0	10	150	31000	14	0	60	140	34000
5	120	0	60	48000	15	108	0	84	49200
6	0	10	150	31000	16	0	30	150	33000
7	80	0	140	52000	17	0	20	90	20000
8	0	50	170	39000	18	50	0	150	45000
9	120	0	60	48000	19	96	0	108	50400
10	0	20	150	32000	20	0	30	120	27000

5.1.4.

Для производства трех видов изделий (A, B и C) используется сырье типа I, II и III, причем закупки сырья типа I и II ограничены возможностями поставщиков. В следующей таблице приведены нормы затрат сырья, цены на сырье и на изделия, а также ограничения по закупке сырья.

Тип сырья	Цена на 1 кг сырья (руб.)	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг)			Ограничения по закупке сырья (кг)
		A	*B*	*C*	
I	2	1	3	*a*	3000
II	1	4	1	3	-
III	*b*	6	5	2	3320
	Цена одного изделия (руб.)	6*b* + 12	5*b* + 22	c	

Требуется определить план производства продукции с целью максимизации прибыли.

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	2	1	17	6	3	1	22	11	3	3	26	16	4	2	27
2	2	2	19	7	3	2	23	12	3	4	26	17	4	3	28
3	2	3	21	8	3	2	24	13	4	1	25	18	4	3	30
4	2	4	23	9	3	2	25	14	4	1	27	19	4	4	30
5	3	1	21	10	3	3	25	15	4	2	26	20	4	4	32

Ответ

	Объем выпуска изделия *A* (ед.)	Объем выпуска изделия *B* (ед.)	Объем выпуска изделия *C* (ед.)	Общая прибыль (руб.)		Объем выпуска изделия *A* (ед.)	Объем выпуска изделия *B* (ед.)	Объем выпуска изделия *C* (ед.)	Общая прибыль (руб.)
1	0	160	1260	12480	11	0	440	560	12760
2	0	160	1260	12480	12	0	440	560	11640
3	0	160	1260	12480	13	0	520	360	12120
4	0	160	1260	12480	14	0	520	360	12840
5	0	440	560	12200	15	0	520	360	11760
6	0	440	560	12760	16	0	520	360	12120
7	0	440	560	12200	17	0	520	360	11760
8	0	440	560	12760	18	0	520	360	12480
9	0	440	560	13320	19	0	520	360	11760
10	0	440	560	12200	20	0	520	360	12480

5.1.5.

На фабрике производится ткань двух артикулов. Любая из этих тканей может изготавливаться на станках одного их двух типов. В следующей таблице указаны: производительность станка каждого типа при изготовлении артикулов 1 и 2; суммарные мощности станочного парка фабрики в расчете на одну рабочую неделю; трудовые затраты по обслуживанию станков в минутах рабочего времени на 1 ч работы станка; цена метра ткани каждого артикула.

Тип станков	Мощность (тыс. ч)	Трудозатраты (мин/ч)	Производительность (м/ч)	
			Артикул 1	Артикул 2
1	30	*a*	20	15
2	*b*	6	12	6
		Цена 1 м ткани (руб.)	180	*c*

Известно также, что недельный ресурс трудозатрат на обслуживание станков равен 6000 мин. Требуется составить недельный план выпуска тканей с целью максимизации стоимости изготовленной продукции.

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	10	30	260	6	10	40	280	11	9	30	300	16	8	30	280
2	10	30	280	7	10	40	300	12	9	30	320	17	8	30	300
3	10	30	300	8	10	40	320	13	9	40	280	18	8	30	320
4	10	30	320	9	9	30	260	14	9	40	300	19	8	40	280
5	10	40	260	10	9	30	280	15	9	40	320	20	8	40	300

Ответ

	Объем выпуска артикула 1 (м)	Объем выпуска артикула 2 (м)	Общая выручка (руб.)		Объем выпуска артикула 1 (м)	Объем выпуска артикула 2 (м)	Общая выручка (руб.)
1	6000	0	1080000	11	6315,79	0	1136842,11
2	6000	0	1080000	12	0	3750	1200000
3	6000	0	1080000	13	6315,79	0	1136842,11
4	0	3600	1152000	14	6315,79	0	1136842,11
5	6000	0	1080000	15	0	3750	1200000
6	6000	0	1080000	16	6666,67	0	1200000
7	6000	0	1080000	17	6666,67	0	1200000
8	0	3600	1152000	18	0	3913,04	1252173,91
9	6315,79	0	1136842,11	19	6666,67	0	1200000
10	6315,79	0	1136842,11	20	6666,67	0	1200000

5.1.6.

Строителям требуются комплекты досок, каждый из которых состоит из a досок длиной 1,5 м и b досок длиной 0,6 м. Как следует распилить c четырехметровых досок, чтобы получить наибольшее количество комплектов?

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	1	3	660	6	2	5	770	11	3	7	960	16	4	9	630
2	1	3	720	7	2	5	880	12	3	8	510	17	4	9	660
3	1	3	780	8	2	5	990	13	3	8	680	18	4	9	690
4	1	3	840	9	3	7	640	14	3	8	850	19	4	9	720
5	2	5	660	10	3	7	800	15	4	9	600	20	4	9	750

Ответ

Способы распила 4 метровой доски на доски длиной 1,5 м и 0,6 м

Способы распила	Количество получаемых досок	
	Длиной 0,6м	Длиной 1,5м
1	6	0
2	4	1
3	1	2

	Число досок, распиленных способом			*Число комплектов*		*Число досок, распиленных способом*			*Число комплектов*
	1	*2*	*3*			*1*	*2*	*3*	
1	0	550	110	770	11	0	550	110	420
2	0	600	120	840	12	0	600	120	210
3	0	650	130	910	13	0	650	130	280
4	0	700	140	980	14	0	700	140	350
5	0	480	120	420	15	0	480	120	200
6	0	560	210	490	16	0	560	210	210
7	0	640	240	560	17	0	640	240	220
8	0	720	270	630	18	0	720	270	230
9	0	440	200	280	19	0	440	200	240
10	0	550	250	350	20	0	550	250	250

5.2. Индивидуальные задачи

5.2.1.

Чаеразвесовочная фабрика выпускает чай сорта А и Б, смешивая три ингредиента: цейлонский, индийский и китайский. В следующей таблице приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т чая сорта А и Б.

Ингредиенты	Нормы расхода (т/т)		Объем запасов (т)
	А	Б	
Цейлонский чай	0,5	0,2	600
Индийский чай	0,2	0,6	870
Китайский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации 1 т продукции (руб.)	3200	2900	

Требуется составить план производства чая сорта А и Б с целью максимизации суммарной прибыли.

Ответ: 600 т сорта А и 1250 т сорта Б при общей прибыли 5 млн. 545 тыс. руб.

5.2.2.

Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1 500 000 л алкилата, 1 200 000 л крекинг-бензина и 1 300 000 л изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 л бензина сорта А и Б соответственно равна 9000 руб. и 12000 руб. соответственно. Определить месячный план производства бензина сорта А и Б, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

Ответ: 2700 тыс. л бензина сорта А и 1200 тыс. л бензина сорта Б при общей стоимости 38 млн. 700 тыс. руб.

5.2.3.

Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трех продуктов – сена, силоса и концентратов. Эти продукты содержат питательные вещества – белок кальций и витамины. Численные данные представлены в следующей таблице.

Продукты	Питательные вещества		
	Белок (г/кг)	Кальций (г/кг)	Витамины (мг/кг)
Сено	50	10	2
Силос	70	6	3
Концентраты	180	3	1

В расчете на одну корову суточные нормы потребления белка м кальция составляют не менее 2000 и 210 г соответственно. Потребление витаминов строго дозировано и должно быть равно 87 мг в сутки. Составить самый дешевый рацион, если стоимость 1 кг сена, силоса и концентрата равна соответственно 3, 4 и 12 руб.

Ответ: 6 кг сена, 25 кг силоса и 0 кг концентрата на одну корову в сутки при стоимости рациона 118 руб.

5.2.4.

В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции – домостроительных комбината. В следующей таблице указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Заводы	Производство цемента (т/сутки)	Стоимость перевозки 1 т цемента (руб.)		
		Комбинат 1	Комбинат 2	Комбинат 3
1	40	100	150	250
2	60	200	300	300
	Потребности в цементе (т/ сут)	50	20	30

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

Ответ

Оптимальный план перевозок приведен в следующей таблице.

Объем перевозок	Комбинат 1	Комбинат 2	Комбинат 3
Завод 1	20	20	0
Завод 2	30	0	30

При таком плане перевозок общие расходы на транспортировку составят 20 тыс. руб.

5.2.5.

Перед проектировщиками автомобиля поставлена задача сконструировать самый дешевый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу. Основные характеристики материалов представлены в следующей таблице.

Характеристика	Материалы		
	Металл	Стекло	Пластмасса
Стоимость (руб./м^2)	250	200	400
Масса (кг/м^2)	10	15	3

Общая поверхность кузова (вместе с дверьми и окнами) должна составлять 14 м^2; из них не менее 4 м^2 и не более 5 м^2 следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг. Сколько металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший проект?

Ответ: 60/7 м^2 металла, 4 м^2 стекла и 10/7 м^2 пластмассы при общей стоимости 3514 руб. 29 коп.

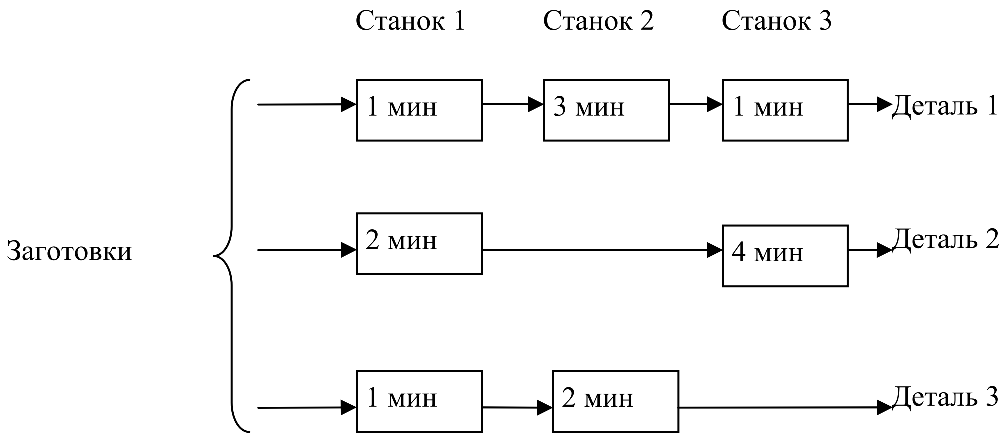
5.2.6.

В металлургический цех в качестве сырья поступает латунь (сплав меди с цинком) четырех типов с содержанием цинка 10, 20, 25 и 40 % по цене 10, 30, 40 и 60 руб. за 1 кг соответственно. В каких пропорциях следует переплавлять это сырье в цехе, чтобы получить сплав (латунь), содержащий 30 % цинка и при этом самый дешевый?

Ответ: самым дешевым (43,33 руб./ кг) является сплав первого и четвертого типов сырья в отношении 1:2.

5.2.7.

Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на трех станках. На следующем рисунке показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени её обработки на станках.



Суточный ресурс рабочего времени станков 1, 2 и 3 составляет 890, 920 и 840 мин. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 равна соответственно 30, 10 и 20 руб. Требуется составить суточный план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

Ответ: за сутки изготавливать 0 деталей вида 1, 210 деталей вида 2, 460 деталей вида 3 при общей стоимости 11300 руб.

5.2.8.

Предприятие производит холодильники, газовые плиты, морозильные шкафы и электропечи по цене 4000, 3600, 5000 и 2000 руб. соответственно. Постоянным фактором, ограничивающим объемы производства, является фиксированная величина трудовых ресурсов – 12 000 человеко-часов в месяц. Кроме того, в ближайший месяц будет дефицитной и листовая сталь для корпусов указанных изделий, поскольку поставщики могут обеспечить лишь 7000 м2 этого материала. Требуется составить план производства на данный месяц, с тем чтобы максимизировать стоимость выпущенной продукции. Известно, что для изготовления холодильника требуется 2 м2 листовой стали и 3 чел.-ч рабочего времени, для газовой плиты – соответственно 1,5 м2 и 3 чел.-ч, для морозильного шкафа – 3 м2 и 4 чел.-ч, для электропечи – 1 м2 и 2 чел.-ч.

Ответ: произвести за месяц 2000 холодильников и 2000 газовых плит, остальные виды продукции не производить, при этом общий доход составит 15 млн. 200 тыс. руб.

5.2.9.

Участник экспедиции укладывает рюкзак, и ему требуется решить, какие положить продукты. В его распоряжении имеются мясо, мука, сухое молоко и сахар. В рюкзаке для продуктов осталось лишь 45 дм^3 объема, и нужно, чтобы суммарная масса продуктов не превосходила 35 кг. Врач экспедиции рекомендовал, чтобы мяса (по массе) было больше муки по крайней мере в два раза, муки не меньше молока, а молока по крайней мере в восемь раз больше, чем сахара. Сколько и каких продуктов нужно положить в рюкзак, чтобы суммарная калорийность продуктов была наибольшей? Характеристики продуктов приведены в следующей таблице.

Характеристики	Продукты			
	Мясо	Мука	Молоко	Сахар
Объем (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорийность (ккал/г)	1500	5000	5000	4000

Ответ: 16 кг мяса, 8 кг муки, 8 кг сухого молока, 1 кг сахара при общей калорийности 108 тыс. ккал.

5.2.10.

На мебельной фабрике требуется раскроить 5000 прямоугольных листов фанеры размером 4×5 м каждый, с тем чтобы получить два вида прямоугольных деталей: деталь А должна иметь размер 2×2 м, деталь Б – размер 1×3 м. Необходимо, чтобы деталей А оказалось не меньше, чем деталей Б. Каким образом следует производить раскрой, чтобы получить минимальное по площади количество отходов?

Подсказка: найдите все возможные способы раскроя листа на детали А и Б, в качестве переменных выберите число листов, раскроенных каждым способом.

Ответ: 2000 листов раскроить способом 1, 3000 листов способом 2 (способ 1: разрезать лист на 4 детали А и 1 деталь Б; способ 2: разрезать лист на 2 детали А и 4 летали Б); при этом число общая площадь отходов будет 2000 м^2.

5.2.11.

Фермерское хозяйство может засеять свои поля пшеницей четырех сортов, урожайность которых завит от того будет ли лето дождливым или сухим. Соответствующие данные приведены в следующей таблице.

Погода	Урожайность (ц/га)			
	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3	Сорт 4
Дождливая	25	20	30	15
Сухая	15	20	10	40

Какие сорта пшеницы и в какой пропорции следует сеять, чтобы максимизировать гарантированный (не зависящий от погоды) урожай?

Подсказка: в качестве возьмите долю сева каждого сорта пшеницы и гарантированный урожай.

Ответ: Сорт 3 и сорт 4 посеять в пропорции 5:4, тогда гарантированный урожай с каждого центнера составит 23,33 ц/га.

5.2.12.

В цеху производятся два вида изделий, на производство одной единицы первого изделия затрачивается 10 минут рабочего времени, а на единицу второго изделия –

12 минут. Располагаемый фонд рабочего времени равен 2500 минут в день (некоторые операции выполняются параллельно). Можно превысить этот фонд, однако привлечение дополнительной рабочей силы стоит 15 руб. за одну минуту. В течение одного рабочего дня можно произвести от 150 до 200 единиц первого изделия, но не более 45 единиц второго изделия.

1. Пусть доход от единицы первого изделия составляет 180 руб, а второго – 225 руб. Постройте модель и найдите оптимальный план производства обоих видов изделий, максимизирующий общий доход, определите объем использования дополнительной рабочей силы.

2. Будет ли компания привлекать дополнительную рабочую силу, стоимость данного ресурса увеличится до 45 руб. в минуту?

Решение.

1. Пусть x_1 – это число единиц первого изделия, x_2 – это число единиц второго изделия. Тогда на производство первого изделия необходимо $10x_1$ минут рабочего времени, а второго $12x_1$ минут. Превышение фонда рабочего времени составит $10x_1 + 12x_2 - 2500$ минут. Тогда расходы на дополнительную рабочую силу составят $15*(10x_1 + 12x_2 - 2500)$ руб. Первого изделия нужно не менее 150 штук и не более 200, а второго не более 45 единиц, отсюда получаем три ограничения на объем выпуска: $x_1 \geq 150$, $x_1 \leq 200$, $x_2 \leq 45$. Объем выпуска не может быть отрицательным, поэтому $x_2 \geq 0$. Доход от первого изделия составит $180x_1$ руб., а второго $225x_2$ руб. Тогда общий доход от обоих видов изделий с учетом затрат на дополнительную рабочую силу составит

$$180x_1 + 225x_2 - 15(10x_1 + 12x_2 - 2500) = 30x_1 + 45x_2 + 37500 \text{ руб.}$$

Таким образом, задача линейного программирования будет иметь вид

$$z = 30x_1 + 45x_2 + 37500 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 \geq 150, x_1 \leq 200, \\ x_2 \leq 45, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу, получим максимально значение целевой функции – общего дохода $z_{\max} = 45525$ руб., оптимальный план выпуска составит $x_{опт} = (200; 45)$, т.е. 200 единиц первого изделия и 45 единиц второго. Объем дополнительной рабочей силы составит

$$10x_1 + 12x_2 - 2500 = 10*200 + 12*45 - 2500 = 40 \text{ (мин. в день).}$$

2. Стоимость дополнительной рабочей силы возросла до 45 руб. за мин, поэтому изменится целевая функция:

$$180x_1 + 225x_2 - 45(10x_1 + 12x_2 - 2500) = -270x_1 - 315x_2 + 112500 \text{ руб.}$$

Получается, что затраты на дополнительную рабочую силу слишком большие, поэтому не имеет смысла её использовать, поэтому $10x_1 + 12x_2 \leq 2500$. Тогда общий доход без дополнительной рабочей силы составит $180x_1 + 225x_2$, а задача линейного программирования примет вид

$$z = 180x_1 + 225x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 150, x_1 \leq 200, \\ x_2 \leq 45, x_2 \geq 0, \\ 10x_1 + 12x_2 \leq 2500. \end{cases}$$

Решив эту задачу, получим максимально значение целевой функции – общего дохода $z_{\max} = 45405$ руб., оптимальный план выпуска составит $x_{опт} = (196;45)$, т.е. 196 единиц первого изделия и 45 единиц второго.

5.2.13.

Магазин продает два вида безалкогольных напитков: сок А и сок Б. Доход от одной упаковки сока А составляет 1,5 руб., а сока Б – 2,1 руб. В среднем магазин за день продает не более 500 упаковок обоих напитков. Покупатели предпочитают покупать сок марки Б, соотношение спроса на сок Б к спросу на сок А составляет не менее 2:1. Магазин продает не менее 100 упаковок сока А в день.

1. Сколько упаковок каждого напитка должен иметь магазин в начале рабочего дня для максимизации дохода?

2. Составить и решить двойственную задачу. Дать интерпретацию двойственным переменным, ограничениям и целевой функции.

Решение.

1. Пусть x_1 – число упаковок первого напитка А для продажи в течение дня, а x_2 – число упаковок сока Б. Нам известен доход от одной единицы для обеих соков, откуда общий доход от продажи двух видов соков за день составит $1{,}5x_1 + 2{,}1x_2$, его необходимо максимизировать. Оба вида соков за день продается не более 500 упаковок, поэтому $x_1 + x_2 \leq 500$. Кроме того, сока А продается не менее 100 упаковок за день, откуда $x_1 \geq 100$. Соотношение спроса на сок Б к спросу на сок А не менее чем 2:1, поэтому $2x_1 \leq x_2$. Объем спроса на сок не может быть отрицательным, значит, $x_1, x_2 \geq 0$.

Таким образом, задача линейного программирования будет иметь вид

$$z = 1{,}5x_1 + 2{,}1x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500, \\ x_1 \geq 100, 2x_1 \leq x_2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Перепишем эту задачу в стандартной форме

$$z = 1{,}5x_1 + 2{,}1x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500, - x_1 \leq -100, \\ 2x_1 - x_2 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу, получим, что максимум дохода равен $z_{\max} = 990$ руб. при наличии 100 упаковок сока А и 400 упаковок сока Б в начале рабочего дня.

2. В прямой задаче три ограничения-неравенства, поэтому в двойственной будет 3 неотрицательных переменных (обозначим их y_1, y_2 и y_3). Целевая функция прямой задачи максимизируется, поэтому в двойственной она будет минимизироваться, правая часть ограничений прямой задачи будет коэффициентами целевой функции для двойственной. Откуда целевая функция будет иметь вид $z_1 = 500y_1 - 100y_2 + 0y_3 = 500y_1 - 100y_2 \to \min$. Каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи. Знак ограничений двойственной задачи будет «$\geq$», так как переменные прямой задачи неотрицательны и целевая функция двойственной задачи минимизируется. Коэффициенты целевой функции прямой задачи будут правой частью ограничений двойственной задачи. Для переменной x_1 коэффициенты в трех ограничениях прямой задачи равны $\{1; -1; 2\}$, коэффициент в целевой функции 1,5. Отсюда получаем первое ограничение двойственной задачи $1 * y_1 + (-1) * y_2 + 1 * y_3 \geq 1{,}5$. Аналогично получаем второе ограничение $1 * y_1 + 0 * y_2 + (-1) * y_3 \geq 2{,}1$.

Таким образом, двойственная задача будет иметь вид

$$z_1 = 500y_1 - 100y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 1{,}5; \\ y_1 \quad - \quad y_3 \geq 2{,}1; \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решением данной задачи будет $z_{1\min} = 990$ при $y_1 = 2{,}1$, $y_2 = 0{,}6$, $y_3 = 0$. При этих значениях $y_1 - y_2 + 2y_3 = 1{,}5$, а $y_1 - y_3 = 2{,}1$. Двойственные переменные по теореме о дополняющей нежесткости отражают дефицитность ресурсов и их скрытую стоимость. Переменная y_1 соответствует первому ограничению прямой задачи $x_1 + x_2 \leq 500$. По теореме о дополняющей нежесткости, если $y_1 > 0$, то $x_1 + x_2 = 500$; или если $x_1 + x_2 < 500$, то $y_1 = 0$. Ресурсом в первом ограничении является максимальное возможное число упаковок (500 единиц). Если $y_1 > 0$, то этот ресурс будет использован полностью, т.е. будет дефицитен. Таким образом, переменная y_1 показывает скрытую стоимость единицы запаса соков на начало рабочего дня, если общее число упаковок напитков на начала дня будет равно 500. Согласно решению $y_1 = 2{,}1 > 0$ и $x_1 + x_2 = 500$. Аналогично, переменная y_2 связана со вторым ограничением $-x_1 \leq -100$. Если $y_2 > 0$, то по теореме о дополняющей нежесткости $x_1 = 100$. Отсюда переменная y_2 показывает скрытую цену использования 1 единицы сока А, если его объем равен 100 упаковкам. В нашем случае $y_2 = 0{,}6 > 0$ и $x_1 = 100$. Переменная y_3 связана с третьим ограничением $2x_1 + x_2 \leq 0$. Если $y_3 > 0$, то по теореме о дополняющей нежесткости $2x_1 = x_2$. Отсюда переменная y_3 показывает, выполняется ли соотношение 2:1 для напитков. В нашем случае $y_3 = 0$ и $2x_1 < x_2$. Величины y_1 и y_2 позволяют оценить изменение целевой функции при небольшом изменении ресурсов (максимальное возможное число упаковок и минимальный объем сока А). Например, при увеличении первого ресурса на единицу рост целевой функции составит около $y_1 = 2{,}1$ рублей.

Целевая функция $z_1 = 500y_1 - 100y_2 \to \min$ минимизирует скрытую стоимость использования ресурсов.

По теореме о дополняющей нежесткости, если $y_1 - y_2 + 2y_3 > 1{,}5$, то $x_1 = 0$; или если $x_1 > 0$, то $y_1 - y_2 + 2y_3 = 1{,}5$. Справа в ограничении $y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 1{,}5$ находится доходность одной единицы сока А, а y_1, y_2, y_3 – это скрытые цены различных ресурсов. Откуда величина $y_1 - y_2 + 2y_3$ – это скрытая себестоимость единицы сока А. Если $y_1 - y_2 + 2y_3$ больше 1,5 руб., то себестоимость единицы сока А выше его доходности, поэтому продавать его невыгодно и $x_1 = 0$. Если $y_1 - y_2 + 2y_3 = 1{,}5$, то имеет смысл его продавать. По найденному решению $y_1 - y_2 + 2y_3 = 1{,}5$ и $x_1 = 100 > 0$. Аналогично интерпретируется второе ограничение двойственной задачи $y_1 - y_3 \geq 2{,}1$.

5.2.14.

Мебельная фабрика занимается сборкой столов и стульев. Она привлекает к работе на 10 дней четырех столяров. Каждый столяр затрачивает 2 часа на сборку стола и 30 минут на сборку стула. Покупатели обычно приобретают вместе со столом от 4 до 6 стульев. Доход от одного стола составляет 4050 руб. и 1500 руб. от одного стула. На фабрике установлен 8 часовой рабочий день.

Подсказка: найдите общий фонд рабочего времени с учетом наличия 4 работников, 8 часового рабочего дня и 10 дневного срока.

1. Определите структуру производства (число столов и стульев, собранных за 10 рабочих дней), которая бы максимизировала общий доход.

Ответ: 64 стола и 384 стула, общий доход 662400 руб..

2. Изменится ли найденное решение, если доходность столов и стульев уменьшится на 10% (почему)?

Ответ (частичный): не изменится: 64 стола и 384 стула.

3. Изменится ли найденное в первом пункте оптимальное решение, если доходность столов и стульев составит соответственно 3600 руб. и 750 руб. (почему)?

Ответ (частичный): изменится: 80 столов и 320 стульев.

5.2.15.

Банк в течение нескольких месяцев планирует вложить до 6 млн. руб. в кредитование частных лиц (2 вида кредита: на потребительские нужды и на покупку автомобиля). Доход банка от кредитования составляет 14% годовых для потребительских кредитов и 12% для автокредитов (без учета невозврата). Оба вида кредита возвращаются в конце годичного срока кредитования. Известны проценты невозврата по этим кредитам: 3% для потребительских и 2% для автомобильных. Согласно политике банка объемы кредитования покупки автомобилей должны более чем в два раза превышать объемы потребительского кредитования. Необходимо максимизировать доход от вложений банка в кредиты.

Подсказка: в качестве переменных лучше взять долю потребительского кредитования и долю автокредитования в общей сумме вложений, сумма этих двух долей равна 1, доходность по кредитам с учетом невозврата рассчитывается как доходность без учета невовзрата умножить на долю возврата.

1. Найти оптимальное размещение средств по двум видам кредитования и определить коэффициент невозврата и доходности по всем кредитам.

Ответ: 2 млн. руб. на потребительские кредиты и 4 млн. руб. на автокредиты при общем доходе 602 тыс. руб., общий коэффициент невозврата 2,33%, общая доходность 10,03%.

2. Изменится ли оптимальное решение, если проценты невозврата изменятся: 4% для потребительских кредитов и 3% для автомобильных (почему?).

Ответ: не изменится решение, изменится только значение целевой функции.

5.2.16.

Завод производит два типа электрических двигателей, каждый на отдельной сборочной линии. Производительность этих линий составляет 600 и 750 двигателей в день. Для производства двигателя первого типа используется 10 единиц одного вида детали, а для двигателя второго типа – 8 единиц этого же комплектующего. Поставщик может за день поставить не более 8000 деталей. Доходность двигателя первого типа составляет 1800 руб. за единицу, а второго – 1200 руб. Необходимо максимизировать общий доход от производства двигателей.

1. Определите оптимальную структуру ежедневного производства двигателей.

Ответ: 600 единиц двигателей первого типа и 250 единиц второго при общем доходе 1 380 тыс. руб.

2. Составить и решить двойственную задачу. Дать интерпретацию двойственным переменным, ограничениям и целевой функции.

5.2.17.

Консервный завод перерабатывает за смену до 30 000 кг спелых помидоров (закупочная цена 10 руб. за кг) в томатный сок и пасту. Готовая продукция пакетируется в упаковки по 24 банки. Производство одной банки пасты требует 1 кг спелых помидоров, а одной банки сока 0,5 кг спелых помидоров. Заводской склад может принять за смену только 2000 упаковок сока и 6000 упаковок пасты. Оптовая цена одной упаковки томатной пасты составляет 540 руб., одной упаковки томатного сока 300 руб. Найдите оптимальную структуру производства консервного завода (число упаковок пасты и сока) при условии максимизации общего дохода (за вычетом расходов на сырье).

Ответ: 250 упаковок томатной пасты и 2000 банок томатного сока при общем доходе 435 тыс. руб.

5.2.18.

Мебельная фабрика занимается сборкой двух видов шкафов: первый вид покрывается краской, второй вид покрывается лаком. Покраска и покрытие лаком производится на одном участке. Сборочная линия может собирать не более 200 крашенных и 150 лакированных шкафов. Лакирование занимает в два раза больше времени, чем покраска. Если покрасочный участок занят только лакированием, то за день лакируется не более 180 шкафов. Доход от крашенных шкафов 3000 руб. за единицу, а лакированных – 4200 руб. Сформулируйте задачу линейного программирования и составьте оптимальный план на день для покрасочного участка при максимизации общего дохода.

Ответ: 200 окрашенных шкафов и 80 лакированных при общем доходе 936 тыс. руб.

5.2.19.

Фабрика производит два типа шляп. На производство шляпы первого типа уходит в два раза больше рабочего времени, чем на производство второго типа. Если фабрика будет производить только шляпы второго типа, то в день она сможет изготовить 400 таких шляп. Спрос на продукцию в день составляет не более 150 шляп первого типа и 200 шляп второго типа. Доход от производства шляп составляет 240 руб. на единицу первого типа и 150 руб. – второго типа.

1. Найдите ежедневный оптимальный план производства шляп двух видов при условии максимизации общего дохода.

Ответ: сто шляп первого типа и 200 шляп второго типа при общем доходе 54 тыс. руб.

2. Составить и решить двойственную задачу. Дать интерпретацию двойственным переменным, ограничениям и целевой функции.

Ответ (частичный): $y^* = (0; 30; 120)$ при $b = (150; 200; 400)$.

5.2.20.

Компания производит два вида продукции А и Б. Объем продаж А составляет не менее 80% от общего объема продаж продуктов А и Б. Однако компания не может производить более 100 единиц продукта А в день. Для производства этих продуктов используется одно и тоже сырье, которого поступает не более 120 кг в день. На изготовление единицы продукта А расходуется 1 кг сырья в день, а единицы продукта Б – 2 кг. Цена одной единицы продукта А и Б составляет 600 руб. и 1500 руб. соответственно.

1. Найдите оптимальную ежедневную структуру производства этой компании при условии максимизации выручки.

Решение.

Пусть x_1 - число единиц продукта А, производимого за день; а x_2 – продукта Б; объем производства не может быть отрицательным, поэтому $x_1, x_2 \geq 0$.

По условию задачи объем продаж А составляет не менее 80% от общего объема продаж продуктов А и Б, поэтому $x_1 \geq 0{,}8(x_1 + x_2)$. Объем производства продукта А не более 100 единиц в день, поэтому $x_1 \leq 100$. Исходя из норм расхода всего необходимо для производства товаров $x_1 + 2x_2$ сырья, которого поступает не более 120 кг, откуда получаем $x_1 + 2x_2 \leq 120$. Критерием задачи является максимум общей выручки $600x_1 + 1500x_2$. Таким образом, мы получили задачу линейного программирования следующего вида

$$z = 600x_1 + 1500x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}8(x_1 + x_2), \\ x_1 \leq 100, \\ x_1 + 2x_2 \leq 120, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем её к стандартному виду

$$z = 600x_1 + 1500x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 \leq 0, \\ x_1 \leq 100, \\ x_1 + 2x_2 \leq 120, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решив задачу, получим $z_{\max} = 78$ тыс. руб., $x_{опт} = (80; 20)$, т.е. максимальная выручка за день составит 78 тыс. руб., для этого товара А нужно произвести 80 единиц в течение дня , а товара Б – 20 единиц.

2. Составить и решить двойственную задачу. Дать интерпретацию двойственным переменным, ограничениям и целевой функции.

Ответ (частичный): $y^* = (250; 0; 650)$.

5.2.21.

Компания на производство двух продуктов в день затрачивает 10 часов. Производство каждого продукта состоит из последовательного выполнения трех процессов. Данные по этим продуктам и процессам приведены в следующей таблице.

1. Найдите структуру оптимального производства при условии максимизации общего дохода.

Подсказка: на каждый процесс дается не более 10 часов.

Продукт	Количество минут выполнения процесса в единицу времени на единицу продукта			Доход (на единицу продукта), руб.
	Процесс 1	Процесс 2	Процесс 3	
1	10	6	8	60
2	5	20	10	90

Ответ: объем производства за день первого продукта 52,94 единицы, второго – 14,12 единиц при общей выручке 4447,06 руб.

2. Пусть появилась возможность увеличить время на выполнение одного из процессов. Для выбора процесса, время которого будет увеличено, рассчитайте приоритеты процессов (составьте и решите соответствующую двойственную задачу).

Ответ: Исходя из двойственных оценок, наиболее приоритетным является первый процесс, затем второй. У третьего процесса уже имеется резерв времени.

5.2.22.

Компания может рекламировать свою продукцию по радио и по телевидению. Бюджет на рекламу ограничен суммой 300 000 руб. в месяц. Одна минута рекламного времени на радио стоит 450 руб., а на телевидении – 9000 руб. Компания предполагает, что реклама на радио по времени до времени должна превышать рекламу на телевидении не менее чем в два раза. Однако, по мнению руководства компании, нерационально использовать более 400 минут рекламы на радио в месяц. Последние исследования показали, что реклама на телевидении в 25 раз эффективнее рекламы на радио.

1. Разработайте оптимальный бюджет для рекламы на радио и телевидении при условии максимизации общей эффективности рекламы.

Ответ: 60,6 минут рекламы на радио и 30,3 минут на телевидении.

2. Определите стоимость единицы месячного лимита на рекламу по радио (составьте и решите соответствующую двойственную задачу).

Ответ: лимит времени на радио (400 минут) не имеет смысл увеличивать, т.е. стоимость нулевая.

5.2.23.

Корпорация владеет электростанцией. Эта корпорация также владеет несколькими угольными шахтами, поэтому на электростанции в качестве топлива используется уголь. Комитет по защите окружающей среды установил следующие ограничения: концентрация выбрасываемого в воздух сернистого газа не должна превышать 0,002 доли, количество выбрасываемых аэрозольных частиц не должно превышать 10 кг в час. Для генерации тока используется пылевидный уголь двух сортов С1 и С2. Перед сжиганием эти сорта угля обычно смешиваются. Сернистая составляющая в смеси углей определяется как средневзвешенная от доли каждого сорта угля в смеси. Характеристики данных двух сортов угля приведены в следующей таблице.

Сорт угля	Концентрация серы, доля	Количество выделяемых при сжигании 1 тонны угля аэрозольных частиц, кг	Генерируемая мощность, кВт*ч/тн
С1	0,0018	1,05	12000
С2	0,0021	0,45	9000

1. Найдите оптимальную смесь углей обоих сортов при условии максимизации обшей генерируемой мощности за 1 час.

Ответ: за час сжигать 5,128 тн угля сорта С1 и 10,256 тн угля сорта С2 при общей вырабатываемой мощности 153846,152 кВт*ч

2. На сколько изменится генерируемая мощность, если ослабить на 0,5 кг в час ограничение на объем аэрозольных выбросов (составьте и решите соответствующую двойственную задачу).

Ответ: 7692,308 кВт*ч.

5.2.24.

Швейная фабрика производит мужские сорочки и женские блузки для одного магазина. Этот магазин принимает всю продукцию, вырабатываемую данной фабрикой. Процесс производства швейного изделия состоит из раскроя, пошива и упаковки готового изделия. На участке раскроя работают 25 человек, на пошиве изделий – 35 человек, упаковывают готовые изделия 5 человек. Швейная фабрика работает 5 дней в неделю в одну смену (8 часов). Трудозатраты на выпускаемые фабрикой изделия и доход от них показаны в следующей таблице.

Изделие	Расход рабочего времени на одно изделие, мин			Доход от одного изделия, руб.
	Раскрой	Пошив	Упаковка	
Рубашка	20	70	12	75
Блузка	60	60	4	96

1. Определите оптимальную еженедельную структуру производства для этой швейной фабрики при условии максимизации общего дохода.

Ответ: 480 рубашек и 840 блузок при общем доходе в 116 640 руб.

2. Если магазину потребуется не менее 2000 рубашек и 3000 блузок в неделю, то сможет ли швейная фабрика выполнить этот заказ при 5-тидневной рабочей неделе? Если нет, то какой выход из этой ситуации можно предложить и какое оптимальное решение возможно в этом случае?

Ответ: швейная фабрика не сможет, нужно увеличить численность персонала на участке покроя до 92 человек, на участке пошива до 134 человек, на участке упаковки до 15 человек.

3. Определите скрытую стоимость одного часа рабочего времени, затрачиваемого отдельно на раскрой, пошив и упаковку (составьте и решите соответствующую двойственную задачу).

Ответ: 44,4 руб. за раскрой, 51,6 руб. за пошив и 0 руб. за упаковку.

4. Предположим, что можно организовать сверхурочную работу на участках раскроя и пошива. Какую максимальную почасовую добавку за сверхурочные может предложить швейная фабрика?

5.2.25.

Завод бытовой химии производит два вида чистящих средств А и Б, используя при этом сырье I и II. Обработка одной единицы сырья I стоит 240 руб., в результате чего производится 0,5 единицы средства А и столько же средства Б. Обработка одной единицы сырья II стоит 150 руб., в результате чего получается 0,6 единицы средства А и 0,4 средства Б. Ежедневное производство средства А должно быть не менее 10 и не более 15 единиц; средства Б – не менее 12 и не более 20 единиц.

1. Найдите оптимальную структуру выпуска чистящих средств (минимизирующую затраты сырья в рублях на производство)

Подсказка: при обработке сырья одновременно производятся два вида продукции.

Ответ: 15 единиц средства А и 12 единиц средства Б, при этом расходы составят 5130 рублей.

2. Определите скрытую стоимость единицы изменения граничных значений ежедневного выпуска средств А и Б (составьте и решите соответствующую двойственную задачу).

Ответ: у средства А стоимость увеличения верхней границы на одну единицу составляет 210 рублей, у средства Б стоимость уменьшения нижней границы 690 рублей за единицу.

5.2.26.

Конвейер состоит из трех последовательных линий для сборки двух видов радиоприемников: HF-1 и HF-2. Время, необходимое для сборки одного радиоприемника на каждой линии, приведено в следующей таблице.

Сборочная линия	Количество минут на сборку одного изделия	
	HF-1	HF-2
1	6	4
2	5	5
3	4	6

Ежедневные профилактические работы на соответствующих линиях составляют 10%, 14% и 12% от всего рабочего времени, которое для любой линии не превышает 480 минут за смену.

Подсказка: профилактические работы уменьшают фонд рабочего времени для каждой линии.

1. Компания желает иметь такую структуру выпускаемой продукции, чтобы минимизировать время простоя всех трех линий.

Ответ: 50,88 единиц радиоприемника HF-1 и 31,68 единиц HF-2 при общем простое 201,6 минут.

2. Определите скрытую стоимость одного процента уменьшения времени профилактических работ для каждой линии (составьте и решите соответствующую двойственную задачу).

Ответ: для первой и третьей линии стоимость нулевая, для второй линии 4,8.

5.2.27.

Компания производит два вида перчаток. При продаже каждой пары первого вида перчаток (изделия 1) компания получает прибыль 360 руб., при продаже второго вида перчаток (изделия 2) – 120 руб. Данные о нормах трудовых затрат в расчете на одно изделие приведены в следующей таблице.

Цех	Затраты рабочего времени в чел.-ч. на одно изделие	
	Изделие 1	Изделие 2
1	1	2
2	1	3
3	2	3

Согласно оценке начальников цехов на следующей неделе ресурс рабочего времени составит в первом цехе 800 ч, в цехе 2 – 600 ч, в цехе 3 – 2000 ч. Компания заинтересована в максимизации прибыли. Составьте и решите задачу линейного программирования.

Ответ: производить только изделие 1 количестве 600 пар, при этом прибыль составит 216 тыс. руб.

5.2.28.

Хозяин мебельного магазина занимается изготовлением трех видов столов: А, Б и В. При изготовлении каждого стола необходимо затратить определенное время на производство составных частей, сборку и покраску. Все собранные столы Продаются без проблем. Модель В можно продавать без покраски. Сборщики мебели работают на условиях неполной занятости и сдельной оплаты труда, поэтому рабочее время, затраченное на изготовление столов, может от недели к недели меняется. Необходимо определить ассортимент выпускаемой продукции, максимизирующий его прибыль на следующей неделе. Для этого постройте и решите задачу линейного программирования. Данные о нормах трудовых затрат, фонде рабочего времени и прибыльности единицы продукции приведены в следующей таблице.

Модель	Нормы трудовых затрат (чел.-ч. на ед.)			Удельная прибыль (руб. на одну ед.)
	Изготовление частей	Сборка	Окраска	
А	3	4	5	720
Б	1	2	5	810
В	4	5	4	1200
Неокрашенные столы В	4	5	0	900
Ресурс рабочего времени	150	200	300	

Ответ: выпускать 60 столов Б и 16 неокрашенных столов В (остальные модели не выпускать), при этом прибыль составит 63 тыс. руб.

5.2.29.

Инвестиционная фирма управляет инвестиционными портфелями нескольких клиентов. Новый клиент поручает фирме управление своим портфелем в размере 3 млн. руб. Клиент хочет ограничиться покупкой акций трех компаний, характеристики которых представлены в таблице. Постройте и решите задачу линейного программирования, которая может определить, сколько акций каждой компании может приобрести инвестиционная фирма, чтобы оптимизировать ожидаемый годовой доход клиента. Информация об акциях приведена в следующей таблице.

Акции компании	Цена акции, руб.	Ожидаемый годовой доход на акцию, руб.	Максимально возможные инвестиции, тыс. руб.
Компания 1	1800	210	1800
Компания 2	750	90	750
Компания 3	600	90	900

Ответ: вложить 1 350 тыс. руб. в акции компании 1, компании 2 – 750 тыс. руб., компании 3 – 900 тыс. руб., при этом ожидаемый годовой доход составит 382 500 руб.

5.2.30.

В питомнике для домашних животных корм для собак готовится из смеси трех зерновых круп, чтобы обеспечит сбалансированное питание. Соответствующие данные приведены в следующей таблице.

Крупа	Стоимость 1 кг, руб.	Белки, %	Углеводы, %	Жиры, %
А	11,25	62	5	3
Б	9,5	55	10	2
В	6,75	36	20	1

По мнению управляющего питомником каждая собака должна потреблять ежедневно не менее 240 г белка, 30 г углеводов и 15 г жиров. Сколько каждой крупы должна получать собака, чтобы минимизировать затраты.

Ответ: 490,91 г крупы А и 27,27 г крупы В на одну собаку в день (крупу Б не использовать), при этом расходы на эту порцию составят 5,71 руб.

5.2.31.

Компания производит два вида приправ «Острая» и «Пикантная». Обе приправы готовятся из двух ингредиентов: А и Б, причем рецепты приправ допускают определенную свободу в пропорциях. Допустимое процентное содержание ингредиентов, а также данные о доходах и затратах приводятся в следующей таблице.

Приправа	Ингредиент		Цена за 100 г, руб.
	А	Б	
«Острая»	не менее 25%	не менее 25%	10,05
«Пикантная»	не более 75%	произвольно	8,55
Цена за 100 г	4,80	7,77	

Можно закупить до 40 кг ингредиента А и до 30 кг ингредиента Б. Компания в состоянии продать все произведенные приправы. Постройте и решите модель линейного программирования, цель которой – максимизировать доход от продажи приправ.

Ответ: израсходовать 40 кг ингредиента А и 30 кг ингредиента Б на производство 70 кг приправы «Острой», при этом чистый доход составит 2784 руб.

5.2.32.

У компании имеются ограниченные запасы трех ингредиентов (I, II и III), из которых изготавливаются два вида приправ А и Б. Отдел маркетинга сообщил, что компания сможет продать любое количество приправы Б, но не более 1700 бутылок приправы А (водной бутылке любой приправы 100 г смеси ингредиентов). Неиспользованные ингредиенты можно продать на свободном рынке. Текущие цены на ингредиенты (за 100 г): I – 60 руб., II – 70 руб., III – 55 руб. Кроме того, данная компания заключила контракт на поставку 600 бутылок приправы Б с торговой сетью. Данные по нормам затрат, запасам ингредиентов и спросу приведены в следующей таблице.

Товар	Пропорция ингредиентов в одной бутылке приправы			Спрос, бут.	Цена, руб.
	I	II	III		
Приправа А	4	2	2	1700	97,5
Приправа Б	3	2	3	Неограничен	82,5
Запас ингредиентов, кг	280	315	245		

Постройте и решите модель линейного программирования, цель которой – максимизировать чистый доход от продажи приправ.

Ответ: 1700 бутылок приправы А и 5200 бутылок приправы Б, при этом чистый доход составит 175 375 руб.

5.2.33.

Администрация парка планирует ранней весной закупить и внести удобрения для травы газонов. Для нормального роста траве нужен азот, фосфор и калий. При этом минимальное количество азота для газонов – 10 кг, фосфора – 7 кг, калия – 5 кг. На рынке предлагается три вида удобрений; содержание требуемых элементов в кг и цена в расчете на 1 т представлены в следующей таблице.

Удобрение	Содержание в 1 т удобрения веществ в кг			Цена за 1 т удобрения, руб.
	Азот	Фосфор	Калий	
I	25	10	5	3000
II	10	5	10	2400
III	5	10	5	2100

Можно купить любое количество каждого из удобрений и смешать их, прежде чем внести в почву. Постройте и решите задачу линейного программирования, минимизирующую общие затраты на закупку удобрений.

Ответ: 250 кг удобрения I, 200 кг удобрения II и 350 кг удобрения III при общих затратах 1965 руб.

5.2.34.

В выпуске двух продуктов задействованы три станка. Чтобы выпустить 1 кг продукта каждый станок должен отработать определенное количество часов, которое указано в следующей таблице.

Станок	Количество часов обработки для производства 1 кг	
	Продукт 1	Продукт 2
1	3	2
2	1	4
3	5	5

Ресурс рабочего времени для станка 1 составляет 10 ч, для станка 2 – 16 ч и для станка 3 – 12 ч. Удельная прибыль в расчете на 1 кг составляет 120 руб. для продукта 1 и 90 руб. для продукта 2. Постройте и решите задачу линейного программирования, максимизирующую общую прибыль от выпуска продукции. Составьте к ней и решите двойственную задачу, дайте интерпретацию двойственным переменным.

Ответ (частичный): произвести 2,4 кг продукта 1 (продукт 2 не производить), при этом прибыль будет 288 руб.

5.2.35.

Американский автозавод выпускает седаны, пикапы и машины-купе. Удельная прибыль (цена за вычетом переменных издержек на единицу продукта), время производства и фиксированные затраты представлены в следующей таблице.

Модель	Удельная прибыль, долл.	Время производства, ч	Постоянные затраты, долл.
Седан	6 000	12	2 000 000
Пикап	6 000	15	3 000 000
Купе	11 000	24	7 000 000

Завод к настоящему моменту уже получил заказы на 100 седанов, 200 пикапов и 300 купе, которые нужно обязательно поставить. Составьте производственный план, минимизирующий суммарное время производства при условии безубыточности производства (маржинальная прибыли равна постоянным затратам). Постройте и решите задачу линейного программирования.

Ответ: минимальное суммарное время выпуска 25 050 ч, для этого нужно выпустить 100 седанов, 1 100 пикапов и 300 купе.

5.2.36.

Компания производит воздухоочистители двух видов: марки А и марки Б. Данные о ценах и затратах приведены в следующей таблице.

Продукт	Цена 1 шт., руб.	Переменные затрат на 1 шт., руб.	Постоянные затраты, руб.
Марка А	13 500	7 200	4 500 000
Марка Б	21 000	10 800	7 200 000

Руководство компании уже заключило контракт на поставку 500 воздухоочистителей марки А и хочет определить, какое количество воздухоочистителей нужно произвести, чтобы достичь безубыточности при условии минимизации общих переменных затрат. Постройте и решите задачу линейного программирования.

Ответ: минимум затрат в 12 661 200 руб. при выпуске 500 ед. марки А и 839 ед. марки Б.

5.2.37.

Инвестиционная компания должна определить, куда вложить средства в размере 10 млн. руб. Цель максимизировать ожидаемый доход в следующем году. Четыре возможных варианта вложения средств представлены в следующей таблице.

Варианты инвестирования	Ожидаемый доход, %	Максимально возможная сумма инвестиций, млн. руб.
Обыкновенные акции	8	5
Облигации казначейства	6	7
Облигации частных компаний	12	2
Муниципальные облигации	9	4

Компания также приняла решение, что не менее 30% средств должно быть вложено в обыкновенные акции и долгосрочные казначейские облигации и не более 40% в облигации частных компаний и муниципальные облигации. Постройте и решите задачу линейного программирования, позволяющую найти структуру вложения средств с максимальным общим ожидаемым доходом.

Ответ: вложить 5 млн. руб. в обыкновенные акции, 1 млн. руб. в облигации казначейства, 2 млн. руб. в облигации частных компаний и 2 млн. руб. муниципальные облигации при общем доходе в 880 тыс. руб.

5.2.38.

Организация управляет четырьмя фермами, производительность которых примерно одинакова. Каждая ферма имеет определенную площадь сельхозугодий, ей требуется определенное количество часов рабочего времени, чтобы ухаживать за растениями и убирать урожай. Эти данные представлены в следующей таблице.

Ферма	Используемая площадь, га	Ресурс рабочего времени в месяц, ч
1	200	1 700
2	360	3 000
3	120	900
4	280	2 200

Организация рассматривает варианты выращивания трех культур, которые отличаются ожидаемой удельной прибылью в расчете на 1 га занимаемой ими площади и требуемыми трудозатратами, что отражено в следующей таблице.

Культура	Максимальная площадь, га	Трудозатраты, ч в месяц на га	Ожидаемая прибыль на 1 га, руб.
А	280	5	15 000
Б	320	10	6 000
В	120	7,5	9 000

Общая площадь, выделенная под каждую культуру, ограничена требованиями к уборочной технике. Чтобы поддерживать примерно одинаковую рабочую нагрузку на фермах, руководство организации решило, что процентные отношения площадей, занятых определенными культурами, должны быть одинаковыми на всех фермах. Руководство организации хочет узнать, какие площади должны быть выделены под каждую из культур на каждой ферме, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль. Постройте и решите задачу линейного программирования.

Ответ: Максимальная прибыль в 12 млн. 840 тыс. руб. будет достигнута при плане сева, представленного в следующей таблице.

Ферма	Культура А	Культура Б	Культура В
Ферма 1	145,83	-	54,17
Ферма 2	262,50	-	97,50
Ферма 3	87,50	-	32,50
Ферма 4	204,17	-	75,83

5.2.39.

Винодел хочет из смеси четырех сортов винограда приготовить три сорта вина. Имеющиеся количества винограда, требования к сорту вина и цены, по которым вина продаются, приведены в таблице. В частности, сорта винограда 2 и 3 в сумме должны составлять не менее 75% в смеси для приготовления вина А и не менее 35% для приготовления вина В. Кроме того, смесь А должна содержать не менее 8% винограда сорта 4, а смесь Б – не менее 10% сорта 2 и не более 35% сорта 4. Можно продать все произведенные вина (данные по составу и цене приведены в следующей таблице). Постройте и решите задачу линейного программирования, позволяющую с максимальным общим доходом использовать виноград.

Вино	Расход сока винограда				Цена, руб./л
	Виноград 1	Виноград 2	Виноград 3	Виноград 4	
А	произвольно	виноград 2 и 3 вместе не менее 75% в любой пропорции		не менее 8%	480
Б	произвольно	не менее 10%	произвольно	не более 35%	300
В	произвольно	виноград 2 и 3 вместе не менее 35% в любой пропорции		произвольно	210
Запас (л)	650	1000	750	1750	

Подсказка: обозначьте через x_{ik} количество винограда сорта i, используемого на производство k-го вида вина, через w_k – объем производства k-го вида вина.

Ответ: максимальная выручка составит 1 398 909,04 руб. (распределение винограда представлено в следующей таблице).

Вино	Расход сока винограда, л			
	Виноград 1	Виноград 2	Виноград 3	Виноград 4
А	0	881,82	750	543,94
Б	650	118,18	0	413,64
В	0	0	0	0

5.2.40.

Ресторан работает 7 дней в неделю. Официанты работают 5 часов в день. Согласно коллективному трудовому договору каждый официант должен работать 5 дней подряд, а затем 2 дня отдыхать. У всех официантов одинаковый еженедельный оклад. Требования штатного расписания представлены в таблице.

День недели	Минимальное необходимое число часов работы официантов
Понедельник	150
Вторник	200
Среда	400
Четверг	300
Пятница	700
Суббота	800
Воскресенье	300

Предполагая, что эти требования циклически повторяются, а также игнорируя тот факт, что число нанятых официантов должно быть целым, постройте и решите задачу линейного программирования, которая позволит руководству составить расписание, удовлетворяющее заданным требованиям при минимальных затратах.

Подсказка: обозначьте через x_j – число работников, которые начинают работу после выходных в j-тый день недели.

Ответ:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-	60	-	80	-	20	-

5.2.41.

Завод может производить четыре вида изделий А, Б, В и Г в произвольных комбинациях. По технологии каждое изделие обрабатывается четырьмя машинами (время обработки в минутах в пересчете на кг готовой продукции показано в таблице). Каждая машина может работать 60 ч в неделю. Изделия могут продаваться по следующим ценам (за кг): А – 270 руб., Б – 210 руб., В – 180 руб., Г – 150 руб. Переменные затраты труда составляют 60 руб. в час для машин 1 и 2, и 90 руб. в час – для машин 3 и 4. Материальные затраты составляют 120 руб. на каждый кг продукции А и 30 руб. на каждый кг продукции Б, В, Г. Сформулируйте и решите задачу линейного программирования, максимизирующую прибыль при заданном максимальном спросе для каждого вида продукции. Данные о нормах затрат машино-часов и спросе приведены в следующей таблице

Продукция	Время обработки машиной 1 кг, мин				Максимальный спрос, кг
	1	2	3	4	
А	5	10	6	3	400
Б	3	6	4	8	100
В	4	5	3	3	150
Г	4	2	1	2	500

Ответ: максимальная прибыль составит 105 037,50 руб. при выпуске 125 кг продукта А, 100 кг продукта Б, 150 кг продукта В и 500 кг продукта Г.

5.2.42.

В данном месяце необходимо выполнить четыре вида работ: А, Б. В и Г. Каждый вид работ может выполняться любым из трех цехов. Время, требуемое на выполнение конкретного задания определенным цехом, стоимость часа работы каждого цеха и ресурс рабочего времени на данный месяц в каждом цехе представлены в следующей таблице.

Цех	Время выполнения задания, ч				Стоимость часа работы, руб.	Ресурс рабочего времени, ч
	А	Б	В	Г		
1	32	151	72	118	2670	160
2	39	147	61	126	2430	160
3	45	155	57	121	2520	160

Каждое задание можно распределить по нескольким цехам в любой пропорции. Например, четверть задания А может быть выполнена за 8 ч цехом 1, а треть задания В – за 9 ч цехом 3. Необходимо распределить выполнение заданий по цехам (сколько каждый цех должен выполнять каждое определенное задание), чтобы минимизировать затраты на выполнение всех заданий. Определите переменные решения, сформулируйте задачу линейного программирования и решите её.

Подсказка: обозначьте через x_{ik} долю выполнения i-го задания k-тым цехом.

Ответ: минимальная стоимость выполнения 3 заданий 891 802,20 руб. достигается при распределении выполнения задания, приведенном в следующей таблице.

Цех	Доля выполнения задания			
	А	Б	В	Г
1	1	0	0	0,046
2	0	1	0	0,103
3	0	0	1	0,851

5.2.43.

Авианосец с понедельника по пятницу находится на маневрах, а в субботу и воскресенье – в порту. На следующей неделе капитан хочет предоставить увольнение на берег во время уик-энда максимально возможному числу моряков (экипаж состоит из 3000 человек). Однако при этом необходимо выполнить запланированные на неделю маневры и удовлетворить требования военно-морского регламента. Требования таковы. Моряки работают в первую смену (от полуночи до полудня) или во вторую (от полудня до полуночи), причем на протяжении недели каждый моряк все дни работает в одну и ту же смену. Каждый моряк должен дежурит ровно четыре дня, даже если в какой-то день работы недостаточно (затем отдыхает три дня). В следующей таблице показано, сколько моряков должно дежурить каждый день в каждую смену. Сформулируйте для данной задачи модель линейного программирования, чтобы найти, сколько моряков должно работать каждый день (минимизировать число человеко-дней в субботу и воскресенье).

Смена	Минимальное число моряков				
	пн	вт	ср	чт	пт
Смена 1	900	1000	450	800	700
Смена 2	800	500	1000	300	750

Подсказка: обозначьте через x_{ij} – число матросов, которые начинают работу после выходных в j-тый день недели в i-тую смену.

Ответ: распределение матросов по сменам лучше сделать так, как показано следующей таблице.

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}
0	75	0	725	0	550	375	0	0	475	0	275	0	525

5.2.44.

Небольшая фирма использует два процесса для изготовления двух продуктов: жидкости для стартера и жидкости для зажигалок. Руководство фирмы пытается решить, сколько часов уделить каждому из процессов. Данные о процессах (в пересчете на один час) приведены в следующей таблице.

Процесс	Расход исходных веществ в ед. за ч		Выход конечных продуктов в ед. за ч	
	Керосин	Бензин	Жидкость для стартеров	Жидкость для зажигалок
1	3	9	15	6
2	12	6	9	24

Федеральной программой компании выделено 300 ед. керосина и 450 ед. бензина. Согласно торговым соглашениям компания должна произвести не менее 600 ед. жидкости для стартера и 225 ед. жидкости для зажигалок. Почасовая прибыль, получаемая при проведении процесса 1 и 2, составляет 13500 руб. и 11700 руб. соответственно. Сформулируйте и решите задачу линейного программирования, максимизирующую прибыль.

Ответ: 40 ч работы процесса 1 и 15 ч – процесса 2, при этом прибыль составит 715,5 тыс. руб.

5.2.45.

Ресторан работает 7 дней в неделю. По условиям найма официанты работают 6 часов в день. В ресторан приходят отдельные посетители и небольшие компании, их посещения будем называть регулярным спросом. Кроме того, более многочисленные группы (клубы по интересам и т.п.) иногда собираются в ресторане на свои еженедельные встречи. Согласно коллективному договору официант работает пять дней подряд, а затем два дня отдыхает. Все официанты получают одинаковую недельную заработную плату. Минимально ежедневное необходимое рабочее время зависит от регулярного спроса, к которому добавлено количество времени, необходимого для запланированных на этот день крупных встреч. Регулярный спрос (выраженный в человеко-часах) и число встреч, запланированных на каждый день, представлены в следующей таблице.

День недели	Регулярный спрос	Количество запланированных встреч
Понедельник	125	1
Вторник	200	0
Среда	350	1
Четверг	300	0
Пятница	650	3
Суббота	725	4
Воскресенье	250	2

Чтобы определить, сколько человеко-часов необходимо для обслуживания встреч, управляющий использует следующую таблицу.

Число запланированных встреч	Требуемое количество человеко-часов
0	0
1	24
2	36
3	52
4	64
5	80

Необходимо составить расписание работы официантов, удовлетворяющее потребности в обслуживании и минимизирующее затраты, предполагая, что данный цикл неограниченно повторяется, и игнорируя тот факт, что число нанятых официантов должно быть целым. (Сделайте формулу, которая бы автоматически находила числ часов на обслуживание встреч по данным этих двух таблиц). Оптимизируйте полученную модель.

Подсказка: обозначьте через x_j – число работников, которые начинают работу после выходных в j-тый день недели.

Ответ: минимум затрат на официантов будет достигнут при распределении по сменам, показанном в следующей таблице.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
–	38,1	26,3	26,3	26,3	14,5	–

5.2.46.

Пусть одна единица лесохозяйственной техники приносит доход 24 060 руб., для её изготовления требуется 200 кг железа, 50 ч рабочего времени, 30 ч термической обработки и 1 коробка передач. Один бульдозер приносит чистый доход 19 800 руб., для его изготовления требуется 1200 кг железа, 110 ч рабочего времени, 12 ч тепловой обработки и 1 коробка передач. Ресурсы компании на рассматриваемый период составляет 195 т железа, 21 000 ч рабочего времени, 6 000 ч тепловой обработки. Коробки передач поставляется дочерней компанией, которая производит их для всего семейства машин. Таким образом, наличие коробок передач для производимой техники определяется тем, сколько времени будет выделено на их производство на заводе дочерней компании. Продолжительность каждого этапа и соответствующая производительность указаны в следующей таблице.

Этап	Длительность, ч	Количество коробок передач, шт./ч.
Наладка	8	0
Запуск	120	0,5
Регулярное производство	–	1

Если лимит выделенного времени на дочернем заводе составляет 10 ч, то из этого времени 8 ч уйдет на наладку, во время которой ничего не производится, а 2 ч придется на фазу запуска, за время которой будет произведено $2 \times 0{,}5 = 1$ коробка передач. Если выделенное время $H \geq 128$, то в первые 8 ч ничего не производится, в следующие 120 ч производится 0,5 коробок в час, а в оставшееся $(H - 128)$ ч будет производиться 1 коробка в час. Таким образом, общее количество произведенных коробок передач составит $60 + H - 128 = H - 68$ штук.

1. Составьте уравнения, определяющее ограничение на производство коробок передач, если выделенное на дочернем заводе время составляет T ч, где $T = 6$; $T = 108$.

2. Определите переменные решения и сформулируйте данную задачу в идее модели линейного программирования максимизации дохода.

3. Найдите оптимальное решение, если на заводе дочерней компании на производство коробок передач выделено 358 ч рабочего времени (добавьте ограничение на целочисленность).

Ответ (частичный) на п.3: произвести 151 шт. лесохозяйственной техники и 122 бульдозера при общем доходе в 6 048 660 руб.

5.2.47.

У компании есть три склада, с которых она может доставлять продукцию трем розничным торговым точкам. Спрос на её продукт Б составляет в первой точке 100 ящиков, во второй – 250, в третьей – 150. Запас продукта Б на складе 1 составляет 50 ящиков, на складе 2 – 275 ящиков и на складе 3 – 175 ящиков. Затраты в рублях на транспортировку одного ящика продукта Б со складов в торговые точки представлены в следующей таблице.

Склад	Стоимость перевозки одного ящика в торговую точку, руб.		
	1	2	3
1	150	210	180
2	240	270	300
3	120	90	330

Постройте модель линейного программирования, которая позволяет определить, сколько ящиков следует доставить в каждую точку с каждого склада, чтобы удовлетворить спрос с минимальными затратами.

Ответ: минимум затрат в 99 тыс. руб. при данном плане перевозок (см. таблицу).

Склад	Объем перевозок в торговую точку, ящиков		
	1	2	3
1	0	0	50
2	100	75	100
3	0	175	0

5.2.48.

Компания управляет тремя Internet-серверами, каждый из которых может выполнять до трех типов запросов: обращения к Web-страницам, запросы к базе данных и запросы к системе электронной коммерции.

Проще всего обрабатывать запросы к Web-страницам. Компания оценивает пропускную способность своих серверов исходя из того, сколько обращений к Web-страницам они могут обработать в течение дня.

Другие типы запросов обрабатывать сложнее, поэтому компания учитывает обработку каждого такого запроса как выполнение нескольких обращений к Web-страницами.

Например, сервер 1 может обработать 230 тыс. обращений к Web-страницам в день, но обработка одного запроса к системе электронной коммерции для данного сервера эквивалентна обработке двух обращений к Web-страницам. Поэтому для запросов к системе электронной коммерции пропускная способность сервера 1 составит всего 115 тысяч запросов в день.

Общая пропускная способность серверов, выраженная в эквивалентах обращений к Web-страницам, представлена в следующей таблице (НПО означает, что на данном сервере нет программного обеспечения, необходимого для обработки запросов соответствующего типа).

Обработка запроса в эквиваленте количества обращений к Web-страницам	Сервер		
	1	2	3
Обращение к Web-странице	1	1	1
Запрос к базе данных	2,5	НПО	4
Запрос к системе электронной коммерции	2	5	НПО
Пропускная способность сервера, тыс. обращений к Web-страницам в день	230	360	160

Компания ожидает, что максимальный ежедневный спрос на различные типы запросов будет таким, как показано в следующей таблице.

Тип запроса	Спрос, тыс. запросов в день
Обращение к Web-странице	310
Запрос к базе данных	40
Запрос к системе электронной коммерции	120

Компания заинтересована в том, чтобы обработать как можно больше запросов. Разработайте модель линейного программирования, которая позволит распределить запросы по серверам так, чтобы достичь данной цели.

Ответ: максимум общего эквивалентного числа запросов равен 750, одно из оптимальных распределений запросов (без приведения к эквивалентным) представлено в следующей таблице.

Число запросов	Сервер		
	1	2	3
Обращение к Web-странице	70	240	0
Запрос к базе данных	64	0	40
Запрос к системе электронной коммерции	0	24	0

5.2.49.

Косметическая компания выпускает три вида продукции: духи, шампунь и крем для лица. Фабрика работает в три смены. В первую смену час рабочего времени стоит 450 руб., а ресурс рабочего времени составляет не более 30 000 ч. При работе во вторую смену платится надбавка в 60 руб. в час, поэтому стоимость часа рабочего времени составляет 510 руб. Ресурс рабочего времени второй смены не превышает 20 000 ч. Для производства каждого вида продукции используется три вида сырья. Компания платит 60 руб. за 1 кг сырья А, 75 руб. за 1 кг сырья Б и 60 руб. за 1 кг сырья В. Данные о трудозатратах, расходах сырья и спросе представлены в следующей таблице (одна упаковка содержит несколько единиц продукта).

	Духи	Шампунь	Крем для лица
Трудозатраты, ч/упаковка	1,5	2	2
Расход сырья А, кг/упаковка	5	7	4
Расход сырья Б, кг/упаковка	2	2	5
Расход сырья В, кг/упаковка	3	5	3
Спрос, упаковка	10 000	7 000	15 000

Компания может также покупать шампунь и крем для лица у зарубежного поставщика. Расходы по доставке импортного шампуня составляют 1 500 руб. за упаковку, а крема 1 800 руб. за упаковку. Сформулируйте и решите модель минимизации затрат при условии удовлетворения (превышения) спроса на продукцию компании.

Подсказка: имеет смысл производить на собственном предприятии, если стоимость 1 ед. произведенной продукции не превышает затрат на закупку 1 ед. аналогичной импортной продукции.

Ответ: произвести 10 000 упаковок духов и 7 500 упаковок крема для лица, закупить зарубежом 7 000 упаковок шампуня и 7 500 упаковок крема для лица, при этом общие затраты составят 49 762 500 руб.

5.2.50.

Компания выпускает три вида DVD-проигрывателей: базовый, класса люкс и портативный. Компания хочет оптимизировать ассортимент продукции, выпускаемый на трех её предприятиях. Предположим, что компания может продать все произведенные DVD-проигрыватели. Производственные мощности предприятий по изготовлению комплектующих и сборке представлены в следующей таблице.

Предприятие	Сборка, ч	Изготовление комплектующих, ч
1	20 000	100 000
2	30 000	100 000
3	10 000	70 000

Прибыль от продажи базовой модели составляет 750 руб., модели класса люкс – 1 250 руб., а портативной – 1 950 руб. Время, необходимое для изготовления комплектующих и сборки различных проигрывателей, приводится в таблице.

Проигрыватель	Сборка, ч на 1 изделие	Изготовление комплектующих, ч на 1 изделие
Базовая модель	3	8
Модель класса люкс	4	11
Портативная модель	8	16

Разработайте модель линейного программирования и найдите оптимальный ассортимент продукции для данной компании.

Ответ: производить только DVD-плееры класса люкс в количестве 15 000 изделий, что принесет прибыль в 18 млн. 750 тыс. руб.

5.2.51.

Компания генерирует электроэнергию из трех видов топлива: навоза, древесных отходов и природного газа. Этому предприятию необходимо минимизировать затраты на топливо, при этом производство электроэнергии в следующем месяце должно составить не менее 7 200 МВт*ч. Навоз поставляется из близлежащих ферм, которые платят этой энергетической компании 1 500 руб. за утилизацию тонны навоза. Древесные опилки закупаются на местной лесопилке по цене 750 руб. за тонну. Природный газ поставляется по трубопроводу по цене 139,5 тыс. руб. за 1 миллион стандартных кубометров. В следующей таблице проводятся выход энергии, ресурс и удельная стоимость каждого вида топлива.

Топливо	Выход энергии	Ресурс	Стоимость
Навоз	10 МВт*ч/т	100 т	-1 500 руб./т
Древесные отходы	7 МВт*ч/т	200 т	750 руб./т
Природный газ	1550 Мвт*ч/ млн. $м^3$	Неограниченно	139,5 тыс. руб./млн. $м^3$

Разработайте модель линейного программирования, которая позволит минимизировать затраты при заданном уровне производства энергии в следующем месяце.

Ответ: использовать 100 т навоза и 4 млн. м^3 природного газа, при этом затраты составят 408 тыс. руб.

5.2.52.

Компания производит два вида шин. Шины «Люкс» – это металлокордные, защищенные от проколов, стойкие к износу шины. Другой вид шин «Стандарт» – это простые недорогие шины с гарантией 60 тыс. км. Удельная прибыль компании составляет 1 500 руб. с каждой шины «Люкс» и 300 руб. с каждой шины «Стандарт». Оба вида шин производятся на одном заводе, их производство осуществляется на одних и тех же станках. В двухэтапном процессе изготовления шин участвуют станок А и станок Б. Время работы станков, затраченное на изготовление одной шины, и общий ресурс времени для каждого станка приведены в следующей таблице.

	Затраты рабочего времени на одну шину, ч		Ресурс рабочего времени, ч
	«Стандарт»	«Люкс»	
Станок А	1	4	120
Станок Б	2	2	100

Для важного дилера компании нужно произвести 20 покрышек «Стандарт», а 4 покрышки «Люкс» были обещаны известному автогонщику.

1. Найдите оптимальный производственный план, максимизирующий прибыль (решите графическим методом).

2. Составьте и решите двойственную задачу линейного программирования.

3. На основе решения двойственной задачи дайте оценку изменения значения целевой функции:

а) если ресурс рабочего времени станка Б увеличить до 120 ч;

б) если проблемы с обслуживанием станков приведут к сокращению ресурса рабочего времени станка А до 100 ч.

4. Решите графическим методом прямую задачу для пунктов 3.а и 3.б и определите фактическое изменение целевой функции. Сравните их с оценками, полученными в пункте 3.

Ответ:

Максимум прибыли 43 500 руб. будет достигнут при выпуске 20 шин «Стандарт» и 25 шин «Люкс»

3.а. Это не изменит значение целевой функции.

3.б. Целевая функция уменьшится на 7 500 руб.

5.2.53.

Полиграфическая компания выпускает рекламные изделия «Выбирай» и «Мандарин», которые покупатели могут брать в местных магазинах и ресторанах. Компания получает доход, продавая место для размещения рекламы в своих изданиях. Стоимость «Выбирай» составляет 1 500 руб. за тыс. экземпляров, а стоимость «Мандарина» – 3 000 руб. за тыс. экземпляров. Чтобы напечатать тысячу экземпляров «Выбирай» требуется один час, а печать тысячи экземпляров «Мандарина» занимает всего полчаса. На следующей неделе ресурс рабочего времени составит 120 ч. Обе рекламные газеты складываются фальцевальной машиной, ресурс рабочего времени которой составляет 200 ч. в неделю, причем она складывает обе газеты со скоростью 1000 экземпляров в час.

1. Компания хочет полностью использовать время печатного станка, минимизировав при этом затраты на производство печатной продукции. Определите графическим методом оптимальный производственный план и его минимальную стоимость.

2. Менеджер данной компании решил максимизировать получаемую от публикаций прибыль. Он определил, что прибыль от тысячи экземпляров «Выбирай» составляет 750 руб., а от тысячи экземпляров «Мандарина» – 1 350 руб. Необходимо напечатать не менее 60 000 экземпляров «Выбирай» и 30 000 экземпляров «Мандарина». Ограничения на ресурс рабочего времени станка и фальцевальной машины остаются прежними. Определите графическим методом оптимальный производственный план, максимизирующий получаемую от публикаций прибыль. Какие ограничения будут активными?

Ответ:

1. Выпускать только издание «Выбирай» в количестве 120 тыс. экземпляров, при этом затраты составят 180 тыс. руб.

2. Максимум прибыли в 207 000 руб. будет при выпуске 60 тыс. экземпляров «Выбирай» и 120 тыс. экземпляров «Мандарина». Активными ограничениями будут ограничения на печатный станок и на выпуск «Выбирай».

5.2.54.

Компьютерная компания производит две модели компьютеров: Standard и Deluxe. Модель Standard имеет один дисковод и системный блок Standard. Модель Deluxe имеет два дисковода и системный блок Deluxe. Удельная чистая прибыль для модели Standard составляет 3000 руб., для модели Deluxe – 4000 руб. В настоящее время компания имеет в своем распоряжении 60 системных блоков Standard, 50 блоков Deluxe и 120 дисководов. Разработайте модель линейного программирования и решите её графическим методом.

Ответ: максимальная прибыль составит 260 000 руб. при производстве 20 компьютеров Standard и 50 компьютеров Deluxe.

5.2.55.

Завод может производить пять различных продуктов в произвольном соотношении. В выпуске каждого продукта принимают участие три станка, как показано в таблице.

Продукт	Время работы станка, мин/кг		
	1	2	3
А	12	8	5
Б	7	9	10
В	8	4	7
Г	10	0	3
Д	7	11	2

Ресурс рабочего времени станка составляет 128 ч в неделю. Все продукты конкурентоспособны и все их произведенное количество может быть продано по цене 150, 120, 150, 120 и 120 руб. за кг продукта А, Б, В, Г, Д соответственно. Переменные затраты составляют 120 руб. в час для станков 1 и 2, а для станка 3 – 90 руб. в час. Стоимость материалов, затраченных на выпуск 1 кг продуктов А и В составляет 60 руб., а продуктов Б, Г, Д – 30 руб. Руководство хочет максимизировать прибыль компании.

1. Решите задачу линейного программирования «Поиском решения» MS Excel и выведите отчет по устойчивости.

2. Сколько часов отработает каждый станок, и в каких единицах измеряются теневые цены для ограничений, задающих ресурс рабочего времени для станков?

3. Какую цену фирма может позволить себе заплатить за получение дополнительного часа рабочего времени станка 2?

4. На сколько может увеличиться цена продажи продукта А, прежде, чем изменится оптимальный производственный план?

Ответ(частичный):

1. Максимальная прибыль равна 54 528 руб. при выпуске 512 кг продукта В и 512 кг продукта Д, остальные виды продукции не производить.

2. Первый станок отработает 128 часов, второй – 128 ч, третий – 76,8 ч.

3. 60*0,325=19,5 (руб.)

4. 41,4 руб.

5.2.56.

Винодельческая компания должна в течение четырех месяцев поставлять ежемесячно 1000 бутылок элитного вина. Удельные затраты на производство одной бутылки составляют в первом месяце 150 руб., во втором – 270 руб., в третьем – 300 руб., в четвертом – 420 руб. Стоимость хранения составляет 90 руб. на 1 бутылку в месяц. Менеджер компании хочет определить наиболее эффективный план производства, минимизирующий суммарные затраты. Предположим, что производство осуществляется партиями по 1000 бутылок. Представьте эту задачу в виде транспортной модели и решите эту задачу.

Решение.

Пусть x_{ij} – число партий изготовленных в i-том месяце и поставленных в месяце j, по смыслу задачи число партий должно быть неотрицательным, т.е. $x_{ij} \ge 0$, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3,4$, $i \le j$. Тогда план производства будет иметь следующий вид.

Месяц поставки / Месяц производства	1	2	3	4
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
2		x_{22}	x_{23}	x_{24}
3			x_{33}	x_{34}
4				x_{44}
Должно быть поставлено, бут.	1 000	1 000	1 000	1 000

В задаче нет ограничений на объем производства. Однако спрос в 1000 единиц ежемесячно должен быть удовлетворен, поэтому ограничение на спрос будет иметь следующий вид $\sum_{i=1}^{j} x_{ij} \ge 1$. Если мы производим в месяце i, а поставляем в месяце j, то затраты на хранение 1 партии для x_{ij} составят $90*(j - i)$ тыс. руб. Общие затраты на хранение за 4 месяца будут

$$90(x_{12} + x_{23} + x_{34}) + 180(x_{13} + x_{24}) + 270x_{14} \text{ тыс. руб.}$$

Стоимость производства 1 бутылки в первом месяце составляет 150 руб. Тогда стоимость всех произведенных в 1 месяце бутылок составит $150(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})$. Аналогично, стоимость в тыс. рублей всех произведенных во 2 месяце бутылок составит $270(x_{22} + x_{23} + x_{24})$, в третьем месяце – $300(x_{33} + x_{34})$, в четвертом месяце – $420x_{44}$. Тогда общая стоимость всех произведенных за 4 месяца бутылок с учетом затрат на хранение в тысячах руб. составит

$$90(x_{12} + x_{23} + x_{34}) + 180(x_{13} + x_{24}) + 270x_{14} + 150(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) +$$
$$+270(x_{22} + x_{23} + x_{24}) + 300(x_{33} + x_{34}) + 420x_{44} =$$
$$= 150x_{11} + 240x_{12} + 330x_{13} + 420x_{14} + 270x_{22} + 360x_{23} + 450x_{24} + 300x_{33} +$$
$$+390x_{34} + 420x_{44}.$$

Данную величину согласно условиям задачи нужно минимизировать. Таким образом, задача линейного программирования будет следующей.

$$z = 150x_{11} + 240x_{12} + 330x_{13} + 420x_{14} + 270x_{22} + 360x_{23} + 450x_{24} + $$
$$+300x_{33} + 390x_{34} + 420x_{44} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} \ge 1, \\ x_{12} + x_{22} \ge 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \ge 1, \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{33}, x_{34}, x_{44} \ge 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу, получаем следующий ответ (один из оптимальных планов).

Число партий	Поставка в 1-й мес.	Поставка в 2-й мес.	Поставка в 3-й мес.	Поставка в 4-й мес.
Производство в 1-й мес.	1	1	0	0
Производство в 2-й мес.		0	0	0
Производство в 3-й мес.			1	1
Производство в 4-й мес.				0

Тогда общие затраты составят 1 080 000 руб.

5.2.57.

Фирма занимается упаковкой наборов экзотических фруктов. Наборы упаковываются в двух пунктах, откуда затем рассылаются по пяти точкам оптовой торговли. Затраты на упаковку одного набора в пунктах 1 и 2 составляют 157,50 руб. и 171 руб. соответственно. Прогнозируемые значения спроса в точках оптовой торговли приведены в след. таблице.

	Точка оптовой торговли				
	1	2	3	4	5
Требуемый объем поставок	4 000	6 000	2 000	10 000	8 000

В пункте 1 производственная мощность по упаковке составляет 20 000 наборов, а в пункте 2 – 12 000 наборов. Стоимость доставки (в руб.) одного набора из пунктов упаковки в торговые точки приводится в следующей таблице.

	Точка оптовой торговли				
Пункт упаковки	1	2	3	4	5
1	18	12	36	27	15
2	45	27	15	24	24

Создайте модель линейного программирования, с помощью которой можно определить, сколько наборов следует отправить из каждого пункта упаковки в каждую торговую точку.

Подсказка: Эта задача является транспортной. Включите помимо стоимости доставки в матрицу тарифов затраты на упаковку набора.

Ответ:

Оптимальный план перевозок будет следующим.

	Точка оптовой торговли				
	1	2	3	4	5
Пункт 1	4000	6000	0	2000	8000
Пункт 2	0	0	2000	8000	0

При этом затраты на доставку и упаковку составят 5 400 000 руб.

5.2.58.

Компания по изготовлению бижутерии необходимо разработать модель управления запасами на три временных периода. Удельные производственные затраты на изготовление бижутерии меняются от периода к периоду и составляют в расчете на единицу продукции 60, 120 и 150 руб. для периодов 1, 2 и 3 соответственно. Расходы на хранение каждой единицы продукции на складе при переходе от одного временного периода к следующему составляют 30 руб. за единицу. Спрос на бижутерию в периоды 1, 2 и 3 составляет 10 000, 20 000 и 30 000 штук. Начальный и конечный запас равен нулю. Постройте модель линейного программирования для определения количества продукции, производимой в течение каждого периода, так, чтобы удовлетворить спрос с наименьшими затратами.

Решение.

Обозначим x_1, x_2, $x_3 \geq 0$ – объемы производства в тыс. штук для периодов 1, 2 и 3 соответственно. Остаток на конец первого периода равен начальному остатку, к которому надо прибавить производство первого периода, а затем из него вычесть потребление первого периода, при этом остаток не может быть отрицательным. Т.е. $0 + x_1 - 10 \geq 0$. Аналогично, для второго периода остаток на конец будет $x_1 - 10 + x_2 - 20 \geq 0$. А для третьего периода остаток на конец должен быть нулевым, т.е. $x_1 - 10 + x_2 - 20 + x_3 - 30 = 0$. Стоимость хранения остатка на конец первого периода будет $30(x_1 - 10)$, для второго периода $30(x_1 + x_2 - 30)$ тыс. руб. Отсюда общая сумма затрат на хранение составит $(60x_1 + 30x_2 - 1200)$ тыс. руб. Затраты на изготовление бижутерии составят $(60x_1 + 120x_2 + 150x_3)$ тыс. руб. Таким образом, общие затраты на изготовление и хранение будут равны $(120x_1 + 150x_2 + 150x_3 - 1200)$ тыс. руб., их надо согласно условиям задачи минимизировать. Тогда задача линейного программирования будет следующей.

$$120x_1 + 150x_2 + 150x_3 - 1200 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \ge 30, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 60, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Тогда план производства будет $x_1 = 60$, $x_2 = x_3 = 0$ при общем уровне затрат в 6 млн. руб.

5.2.59.

Заведующий столовой отвечает за закупку консервированных продуктов для столовой крупного университета. Ему известно, каким будет спрос в течение учебного года, он также приблизительно знает закупочные цены. Эти данные для учебного года, начинающегося в сентябре (9-й месяц), приводятся в следующей таблице.

	Номер месяца								
	9	10	11	12	1	2	3	4	5
Спрос, ящики	1000	900	850	500	600	1000	1000	1000	500
Цена за ящик, руб.	600	600	600	630	630	660	660	660	660

Он может закупить требуемое количество впрок, чтобы избежать повышения цен, однако за хранение на складе запаса, ставшегося на конец месяца, необходимо платить 6 руб. за ящик в месяц. Начальный и конечный запасы равны нулю. Сформулируйте и решите задачу линейного программирования для составления графика закупок.

Совет: Обозначьте через P_t количество ящиков, закупленных в месяце t, а через I_t – число ящиков на складе на конец месяца t.

Ответ: Заказать 1000 ящиков в сентябре, 900 ящиков – в октябре и 5450 – в ноябре, при этом затраты на покупку составят 4 510 200 руб.

5.2.60.

Компания по изготовлению бижутерии необходимо разработать модель управления запасами на три временных периода. Цена продажи единицы товара постоянная и составляет 120 руб. Удельные производственные затраты в первый период составляют 120 руб., а во второй и третий 90 руб. Расходы на хранение каждой единицы продукции на складе при переходе от одного временного периода к следующему составляют 30 руб. за единицу. Спрос на бижутерию в периоды 1, 2 и 3 составляет 10 000, 20 000 и 30 000 штук. Производитель не обязан полностью удовлетворять спрос. Однако каждая единица неудовлетворенного спроса обходится ему в 45 руб. Производственная мощность в первый период составляет не более 40 000 единиц, а остальные два периода – не более 10 000 единиц продукции. Начальный и конечный запасы равны нулю. Постройте модель линейного программирования, которая позволит составить производственный план, дающий максимальную прибыль.

Совет: Задача 5.2.60 похожа на задачу 5.2.56; введите переменные x_{ij} – число единиц бижутерии, изготовленных в i-том периоде и поставленных в периоде j, i £ j. неудовлетворенный спрос будет во втором и третьем периоде.

Ответ: максимальная прибыль равна (–600) тыс. руб. (минимальный убыток в 600 тыс. руб.) при выпуске, представленном на следующей таблице.

X_{ij}		Период j		
		1	2	3
Период *i*	1	10000	10000	20000
	2		10000	0
	3			10000

5.2.61.

Три завода компании производят небольшие электрические моторы для четырех производителей бытовых приборов. Удельные производственные затраты на заводах, а также ежемесячные производственные мощности отличаются из-за различий в оборудовании и производительности труда (см. следующую таблицу).

Завод	Удельные производственные затраты, руб.	Ежемесячная производительность, шт.
А	510	800
Б	600	600
В	720	700

Заказы клиентов на следующий месяц показаны в следующей таблице.

Клиент	Спрос, шт.
1	300
2	500
3	400
4	600

Затраты на доставку продукции также различны. Удельные затраты на транспортировку в рублях на единицу приводятся в следующей таблице.

	Клиент			
Завод	1	2	3	4
А	90	60	150	210
Б	180	120	240	90
В	270	30	150	120

Руководство компании должно решить, сколько единиц продукции выпустить на каждом заводе, и сколько отправить каждому клиенту с каждого завода. При этом надо минимизировать суммарные производственные и транспортные расходы. Сформулируйте данную задачу в виде транспортной модели и найдите оптимальное решение.

Ответ: план перевозок, при котором достигается минимум затрат в 1 215 000 руб., представлен в следующей таблице.

	Объем доставки клиенту, ед.			
Завод	1	2	3	4
А	300	100	400	0
Б	0	0	0	600
В	0	400	0	0

5.2.62.

Компания приобрела новый завод по производству генераторов. Вы должны ответить на следующий вопрос: сколько новых сотрудников нужно набрать и обучить в течение следующих шести месяцев. Потребность в рабочем времени обученных рабочих и ежемесячные тарифные ставки на следующие шесть месяцев приводятся в таблице.

	Месяц					
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Необходимый ресурс рабочего времени, ч	7800	7500	7500	9200	10000	9000
Тарифная ставка, руб.	36000	36000	39000	39000	42000	42000

Стажеры набираются в начале каждого месяца. Необходимо учитывать, что рабочие должны в течение месяца пройти курс обучения, прежде чем они смогут работать на производстве. Следовательно, стажера нужно принять по крайней мере на месяц раньше, чем возникнет реальная потребность в дополнительном рабочем. На обучение каждого стажера тратится 80 ч времени опытного производственного рабочего, следовательно, каждый рабочий сможет уделить собственно работе на производстве на 80 ч меньше. Согласно контракту каждый обученный рабочий может работать до 195 часов в месяц (это суммарное время, в которое входит работа на производстве и обучение стажеров). Если ресурс рабочего времени обученных рабочих превышает месячную потребность, руководство в начале месяца может временно отстранить от работы не более 15% обученных рабочих. Все рабочие получают полную месячную зарплату, даже если они временно отстранены от работы. Затраты на стажера составляют 18 000 в месяц (зарплата и другие расходы). На начала января имеется 40 обученных рабочих. Сформулируйте задачу найма и обучения в виде модели линейного программирования (переменные должны быть целочисленными).

Решение.

Обозначим x_j – число стажеров, принятых в j-том месяце, $x_j \geq 0$. Располагаемый фонд рабочего времени (РФРВ) в часах в месяце равен следующей величине.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{число}\\ \text{рабочих}\\ \text{на начало}\\ \text{месяца}\end{array} + \begin{array}{l}\text{число стажеров,}\\ \text{обученных}\\ \text{(принятых)}\\ \text{в предыдущем}\\ \text{месяце}\end{array}\right\} *195 - 80* \left\{\begin{array}{l}\text{число}\\ \text{стажеров,}\\ \text{принятых}\\ \text{в текущем}\\ \text{месяце}\end{array}\right\}$$

РФРВ должен быть не меньше необходимого ресурса.

Составим таблицу для расчета РФРВ.

Месяц	Число рабочих на начало месяца	Число стажеров, обученных (принятых) в предыдущем месяце	Число рабочих на конец месяца	Число стажеров, принятых в текущем месяце	РФРВ, ч	Необходимый ресурс рабочего времени, ч
Январь	40	-	40	x_1	$40*195 - 80* x_1 =$ $= 7800 - 80 x_1$	7800
Февраль	40	x_1	$40+ x_1$	x_2	$(40 + x_1)*195 - 80* x_2 =$ $= 7800 + 195 x_1 - 80 x_2$	7500
Март	$40+ x_1$	x_2	$40 + x_1 + x_2$	x_3	$(40 + x_1 + x_2)* 195 -$ $- 80* x_3 =$ $=7800 + 195x_1 +$ $+ 195x_2 - 80x_3$	7500

Ап-рель	$40 + x_1 + + x_2$	x_3	$40 + x_1 + + x_2 + x_3$	x_4	$(40 + x_1 + x_2 + x_3)*195 -$ $- 80* x_4 = 7800 + 195x_1 +$ $+ 195x_2 + 195x_3 - 80x_4$	9200
Май	$40 + x_1 + x_2 + x_3$	x_4	$40 + x_1 + + x_2 + x_3 + + x_4$	x_5	$(40 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)*$ $*195 - 80* x_5 =$ $= 7800 + 195x_1 +$ $+ 195x_2 + 195x_3 +$ $+ 195x_4 - 80x_5$	10000
Июнь	$40 + x_1 + + x_2 + + x_3 + x_4$	x_5	$40 + x_1 + +x_2 + x_3 + +x_4 + x_5$	x_6	$(40 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 +$ $+ x_5)*195 - 80* x_6 =$ $= 7800 + 195x_1 +$ $+ 195x_2 + 195x_3 + 195x_4 +$ $+ 195x_5 - 80x_6$	9000

Условие задачи про временное отстранение не нужно учитывать, так как это не влияет на величину затрат. Издержки на стажеров равны $18*(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$ тыс. руб. Затраты на обученных рабочих составят

$$40*36 + (40 + x_1)*36 + (40 + x_1 + x_2)*39 + (40 + x_1 + x_2 + x_3)*39 +$$
$$+(40 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)*42 + (40 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)*42 =$$
$$= 198x_1 + 162x_2 + 123x_3 + 84x_4 + 42x_5 + 9360 \quad \text{(тыс.руб).}$$

Итого общие затраты на работников составят

$$216x_1 + 180x_2 + 141x_3 + 102x_4 + 60x_5 + 18x_6 + 9360 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования.

$$216x_1 + 180x_2 + 141x_3 + 102x_4 + 60x_5 + 18x_6 + 9360 \to \min$$
$$\begin{cases} 7800 - 80x_1 \geq 7800, \\ 7800 + 195x_1 - 80x_2 \geq 7500, \\ 7800 + 195x_1 + 195x_2 - 80x_3 \geq 7500, \\ 7800 + 195x_1 + 195x_2 + 195x_3 - 80x_4 \geq 9200, \\ 7800 + 195x_1 + 195x_2 + 195x_3 + 195x_4 - 80x_5 \geq 10000, \\ 7800 + 195x_1 + 195x_2 + 195x_3 + 195x_4 + 195x_5 - 80x_6 \geq 9000, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

В январе не имеет смысла нанимать стажеров, так как не хватает рабочего времени, поэтому $x_1 = 0$. В июне также не следует нанимать стажеров, так как нет информации о потребности в следующих месяцах, поэтому $x_6 = 0$. Действительно, решив задачу, получаем $x_1 = x_5 = x_6 = 0$, а $x_2 = 2$, $x_3 = 7$, $x_4 = 3$. Тогда общие затраты на персонал составят 11 013 000 руб.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Мур, Д. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Д. Мур, Л. Уэдерфорд и др. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.
2. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
3. Панюков, А.В. Линейное программирование / А.В. Панюков. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2001. – 59 с.
4. Ашманов, С.А. Линейное программирование / С.А. Ашманов. – М.: Наука , 1981. – 304 с.
5. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко и др. – М.: ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

Дополнительный

6. Панюков, А.В. Задача об оптимальном потоке. Техника программной реализации / А.В. Панюков. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2001. – 43 с.
7. Медведев, С.В. Элементы линейного программирования / С.В. Медведев, Е.Б. Полуэктова. – Челябинск : Издательство ЮУрГУ , 2003. – 75 с.
8. Еремин, И.И. Математические методы в экономике / И.И. Еремин, Вл.Д. Мазуров, М.Ю. Хачай. – Екатеринбург: Издательство «У-Фактория», 2000. – 280 с.
9. Малиновский, Ю.Г. Элементы математического программирования / Ю.Г. Малиновский. – Челябинск: ЧГТУ, 1991. – 88 с.
10. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 347 с.
11. Колемаев В.А. Математические методы и модели исследования операций / В.А. Колемаев и др. - М.: ЮНИТИ-ДАНА , 2008. – 591 с.