МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

65(07)
Ч-939

В.А. Чурюкин

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ В РИСК-МЕНЕДЖМЕНТЕ

Учебное пособие

Челябинск
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Экономика и финансы»

В.А. Чурюкин

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ В РИСК-МЕНЕДЖМЕНТЕ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2015

УДК 651.01(075.8)
Ч-939

Одобрено
учебно-методической комиссией
факультета экономики и управления

Рецензенты:
Н.С. Демин, А.Б. Ковыров

Чурюкин В.А.
Ч-939 Марковские модели в риск-менеджменте: учебное пособие / В.А. Чурюкин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 56 с.

Учебное пособие «Марковские модели в риск-менеджменте» подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 080200.68 «Менеджмент».

Пособие рассматривает моделирование экономических систем на основе теории марковских цепей. Актуальность пособия обусловлена потребностью исследования в менеджменте явлений, развивающихся в форме случайного процесса. Учебное пособие позволит повысить эффективность процесса формирования у магистрантов базовых профессиональных компетенций в области менеджмента.

Для магистрантов, аспирантов, преподавателей и профессиональных менеджеров. Пособие может найти применение в организации очного, заочного и дистанционного обучения.

УДК 651.01(075.8)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Марковские модели в риск-менеджменте» подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 080200.68 «Менеджмент».

Важное место в научном аппарате исследований в менеджменте занимают количественные методы, базирующиеся на современной математике. Цель пособия – познакомить магистрантов с наиболее трудным и важным разделом дисциплины «Методы исследований в менеджменте» со стохастическими моделями и возможностями их применения в моделировании экономических явлений.

Тенденции развития общества и человека свидетельствуют о повышении неопределенности, сложности и взаимозависимости факторов, влияющих на процесс управления, что требует от менеджеров вероятностного подхода к принятию решений. Проблема стохастических аспектов экономических процессов неизбежно возникает в любом исследовании. В настоящее время опыт практического применения стохастических моделей в управлении следует считать недостаточным, имеется настоятельная необходимость в их популяризации. Знакомство с методами исследования на основе марковских процессов позволит повысить эффективность процесса формирования у магистрантов базовых профессиональных компетенций в области менеджмента.

Учебное пособие состоит из трех глав. В первой главе рассматриваются основы моделирования и приводятся понятия модель, система, элемент, состояние, структура, цель. Вторая глава посвящена изучению однородной цепи Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем, рассматриваются управляемые цепи Маркова. В третьей главе рассматриваются марковские модели экономических процессов с конечным числом состояний и непрерывным временем. В работе показана возможность и приведены примеры применения теории марковских цепей для моделирования экономических процессов.

Усвоению материала должны помочь примеры решения практических управленческих задач, приведенные в пособии.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании экономических систем мы часто сталкиваемся с процессами, течение которых заранее предсказать в точности невозможно. Эта непредсказуемость (неопределенность) вызвана влиянием внешних и внутренних случайных факторов и воздействиями, изменяющими ход процесса. В таких условиях особую актуальность приобретают различные стохастические методы исследования.

Стохастический процесс (случайный процесс) X(t), протекающий в физической системе S, представляет собой случайные переходы из одного состояния в другое. Значение случайного процесса при любом фиксированном значении аргумента t является случайной величиной. Случайный процесс представляет собой функцию, которая в результате испытания может принять тот или иной конкретный вид, неизвестный заранее.

Примеры случайных процессов: колебания спроса; изменение числа заявок, поступающих в ремонтную службу фирмы; работоспособность станка, объем продаж товара. Вообще характеристики любой социально-экономической системы в динамике представляют собой случайный процесс.

Есть процессы, на ход которых случайные факторы влияют слабо, и их можно изучать в детерминированной постановке. Однако существуют процессы, где случайность играет очень большую роль, и таких процессов в экономике большинство. Учитывать (или не учитывать) случайность процесса зависит от цели исследования. По мере углубления и уточнения наших знаний об экономике, все большее число процессов приходится рассматривать как случайные, учитывая не только их поведение «в среднем», но и случайные отклонения от этого среднего.

В ряде задач практики встречаются случайные функции, зависящие не от времени, а от другого аргумента, например, спрос на бензин зависит от его цены. Если аргумент не время, то это не процесс, а функция. Понятие «случайная функция» шире понятия «случайный процесс». Процессом следовало бы называть только функцию, зависящую от времени t, но в дальнейшем для простоты во всех случаях будем пользоваться термином «случайный процесс» безотносительно к физической природе аргумента.

Последовательности взаимосвязанных случайных явлений во времени называют стохастическими процессами. Частным видом случайных процессов являются марковские процессы. Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А.Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать "динамикой вероятностей" (прил. 2). В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в самых различных областях. Благодаря сравнительной простоте и наглядности математического аппарата, высокой достоверности и точности получаемых решений, марковские процессы заслуживают особое внимание специалистов, занимающихся моделированием экономических процессов. Марковские модели позволяют определить вероятности нахождения системы на любом этапе во всех состояниях. Единственное ограничение их применения – число состояний системы должно быть небольшим.

Модель оценки эффективности экономических систем на основе управляемых цепей Маркова, учитывающая переходы системы из одного состояния в другое, создает необходимую базу в более обоснованном выборе стратегии роста и развития.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Моделирование — это исследование объектов познания путем построения, изучения и применения их моделей. Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать невозможно, или же это исследование требует много времени и средств. Моделирование предоставляет возможность изучения объекта познания не непосредственно, а через рассмотрение другого, подобного ему и более доступного объекта – его модели. Моделирование – это метод опосредованного познания с помощью объектов – заместителей, это познание мира через упрощение. Технология моделирования требует от исследователя умения выявлять проблемы, ставить задачи, прогнозировать результаты исследования, проводить разумные оценки, выделять главные и второстепенные факторы для построения моделей, выбирать математические формулировки, решать задачи с использованием компьютерных систем, проводить анализ экспериментов. Конечная цель моделирования - это принятие решения, которое должно быть выработано на основе всестороннего анализа полученных результатов.

1.1. Понятие «система»

Объекты, исследуемые в менеджменте, могут быть отнесены к сложным системам. Понятие системы одна из важнейших категорий исследований, единого, общепризнанного определения понятия «система» нет. Определение – это языковая модель системы, и, следовательно, различия целей и требований к модели приводят к разным определениям. Определение системы отражает принимаемую концепцию, помогает исследователю начать ее описание. Система – это научная абстракция, которая отличается от реального объекта не только более сильным обособлением от внешней среды, но и отвлечением от многих внутренних сторон и особенностей самого объекта, которые несущественны с точки зрения исследователя [1, 3]. В составе системы можно условно выделить подсистемы и элементы. Подсистемы представляют собой части системы, являющиеся системами более низкого иерархического уровня. Элемент же может рассматриваться как предел членения системы в рамках данного качества.

Понятие «система» можно определить как средство достижения цели, как совокупность взаимосвязанных элементов, связей между ними и внешней средой, функционирующая как единое целое. Связи обеспечивают целостность системы, определяя структуру системы. Структуру системы можно определить как совокупность частей и внутренних связей системы. Иногда ее определяют как совокупность элементов и связей или отношений. Взаимные связи между отдельными компонентами зачастую важнее, чем сами компоненты.

Связи представляют собой не принимающие решений части системы, осуществляющие взаимодействие между компонентами, а также между системой в целом и средой. Система может иметь внутренние и внешние связи. Внутренние связи реализуются в пределах системы, а внешние – между внешней средой и частями системы. Как внешние, так и внутренние связи могут иметь вещественный, энергетический или информационный характер носителя. Связи могут быть также прямыми и обратными. Прямая связь осуществляется по направлению протекания потоков, а обратная связь – против направления протекания потоков. Если обратная связь усиливает результат первоначального воздействия причины, то она называется положительной, если ослабляет – отрицательной. Положительные обратные связи выводят систему из состояния устойчивости, отрицательные – способствуют его сохранению.

Системы, в которых протекают процессы управления, называются системами управления (рис. 1.1).

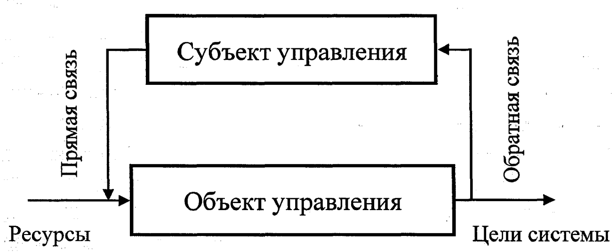

Рис. 1.1. Структура системы управления

В системе управления можно выделить управляющую (субъект управления) и управляемую (объект управления) подсистемы. Экономическая система не может функционировать без управления.

В системе управления (рис. 1.1) управляющая подсистема формирует управляющее воздействие, направленное на управляемую подсистему. Эта связь называется прямой связью (управляющим воздействием). Противоположная по направлению связь (от управляемой подсистемы к управляющей) называется обратной связью. Благодаря обратным связям в системе происходят процессы управления. Оно невозможно, если управляющая система не будет получать информацию об эффекте воздействия, и именно обратная связь обеспечивает относительную устойчивость системы.

Экономическая система существует среди объектов внешней среды. Воздействие внешней среды на систему осуществляется посредством входов системы. Входами системы являются информация, вещество, энергия, которые подлежат преобразованию в системе. Воздействие системы на внешнюю среду происходит посредством выходов системы. Входами системы являются совокупность результатов деятельности системы.

Важным понятием системных исследований является понятие – цель. Цель системы – это «желаемое» состояние ее выходов, т.е. некоторое значение или подмножество значений функций системы. Цель определяет вектор изменения системы, цель зависит от внутренней потребности системы и является её (потребности) прямым следствием. Цели взаимосвязанных компонентов должны быть непротиворечивыми, взаимно не исключающими друг друга. Чтобы достичь цели, система должна находиться в «области достижимости», т.е. параметры, как самой системы, так и ее среды, должны иметь определенные значения.

Цель реальных систем можно свести к трем основным видам формального их задания:

– требуемое конечное состояние системы;
– требуемый порядок смены состояний — движения системы;
– требуемое «направление» движения системы без фиксации конкретной конечной точки.

1.2. Модели систем

Для выработки управленческих решений, обеспечивающих эффективное функционирование и развитие экономической системы, необходимо располагать ее моделью. При этом модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Сущность процесса моделирования схематически отображена на рис. 1.2.

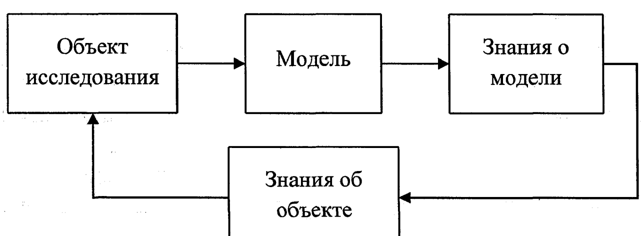

Рис. 1.2. Схема процесса моделирования

Процесс моделирования начинается с конструирования модели объекта, затем модель выступает как самостоятельный объект исследования, результатом исследования являются знания о модели, которые по определенным правилам переносятся на объект. Полученные знания проверяются и используются для преобразования и управления объектом.

Первоначально моделью называли некое вспомогательное средство, объект, который в определенной ситуации заменял другой объект. Очень долго понятие "модель" относилось только к материальным объектам специального типа, например манекен (модель человеческой фигуры), гидродинамическая уменьшенная модель плотины, модели судов и самолетов и т.п. Затем были осознаны модельные свойства чертежей, рисунков, карт — реальных объектов искусственного происхождения, воплощающих абстракцию довольно высокого уровня. Следующий шаг заключался в признании того, что моделями могут служить не только реальные объекты, но и абстрактные, идеальные построения. Типичным примером служат математические модели. Математическое моделирование означает создание условного образа объекта и описание его с помощью символов и операций, принятых в математике. В XX в. понятие модели становится все более общим, охватывающим и реальные, и идеальные модели. При этом понятие абстрактной модели вышло за пределы математических моделей, стало относиться к любым знаниям и представлениям о мире.

Любая деятельность направлена на достижение определенной цели. Целесообразная деятельность невозможна без моделирования. Сама цель уже есть модель желаемого состояния. И алгоритм деятельности — также модель этой деятельности, которую еще предстоит реализовать. Важнейшим, организующим элементом деятельности является цель – образ желаемого будущего, т.е. модель состояния, на реализацию которого и направлена деятельность. Однако роль моделирования этим не ограничивается. Системность деятельности проявляется в том, что она осуществляется по определенному плану, или, как мы уже отмечали, по определенному алгоритму. Следовательно, алгоритм — образ будущей деятельности, ее модель.

Для одних целей нам может понадобиться модель конкретного состояния объекта, своего рода "моментальная фотография" интересующего нас объекта. Такие модели называются статическими. В тех же случаях, когда наши цели связаны не с одним состоянием, а с различием между состояниями, возникает необходимость в описании поведения системы, отображении процесса изменений состояния. Такие модели называются динамическими; примером их служат функциональные модели систем.

Имеется два типа материалов для построения моделей — средства самого сознания и средства окружающего материального мира. Соответственно этому модели делятся на абстрактные (идеальные) и материальные (реальные, вещественные).

Главные различия между моделью и действительностью: конечность, упрощенность и приближенность модели. Различие между моделью и оригиналом вызвано тем, что мы можем отображать реальность лишь в конечном числе отношений, конечными средствами; в результате упрощение и приближенность модели необходимы, неизбежны; но замечательное свойство мира и нас самих состоит в том, что этого достаточно для человеческой практики.

При всем невообразимом многообразии реальных систем, принципиально различимых типов моделей систем очень немного: модель «черный ящик», модель состава и структурная модель. Это относится как к статическим моделям, отображающим фиксированное состояние системы, так и к динамическим моделям, отображающим характер временных процессов, которые происходят с системой.

Динамические варианты формальных моделей систем. Модель «черного ящика» описывает систему, как вход – начальное состояние и выход – конечное (желаемое состояние). Систему представляют как «черный ящик», если неизвестно ее поведение и функционирование изучается по входному и выходному сигналам. Например, годовой план работы предприятия. Модель состава – перечень этапов, состояний системы, на рассматриваемом интервале времени. Динамическая структурная модель представляет собой симбиоз динамической модели «черного ящика» и модели состава. Модель увязывает в единое целое вектор входов в систему, промежуточные состояния и вектор выходов, то есть это подробное описание происходящего или планируемого процесса.

Чтобы получить модель заданной системы, нужно придать формальной модели конкретное содержание, т.е. решить, какие аспекты реальной системы включать как элементы модели избранного типа, а какие — нет, считая их несущественными.

Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, будем называть адекватной этой цели.

Вопросы для самопроверки

1. Чем объясняется существование различных определений системы?
2. Приведите определение понятия "система".
3. Какими признаками должна обладать часть системы, чтобы ее можно было считать элементом?
4. Типы формальных динамических моделей?
5. Перечислите и проинтерпретируйте основные свойства системы.
6. В чем заключается разница между внешними и внутренними связями системы?
7. Цель системы.
8. Виды целей.
9. Типы материалов для построения моделей.
10. Как классифицируются модели систем относительно времени?
11. Различия между моделью и действительностью.

12. Динамические варианты формальных моделей систем.
13. Дайте определение модели "черного ящика".
14. Что общего между понятием "элемент системы" и моделью "черного ящика"?
15. Приведите примеры, когда модель "черного ящика" оказывается единственно применимой.
16. Дайте определение модели состава.
17. Какой набор структурных компонент применяется при построении модели состава?
18. Постройте несколько вариантов модели состава для своего рабочего компьютера.
19. Сформулируйте определение структуры системы.
20. Сформулируйте определение для структурной модели системы.
21. Структура системы управления.
22. Может ли число элементов системы превышать число связей между ними?
23. Как изменяется число связей в системе с увеличением числа ее элементов?
24. Что такое формальная модель системы и как она используется при построении моделей реальных систем?

2. МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

2.1. Свойство марковского процесса

Под процессом понимается последовательная смена состояний объекта во времени. Случайный процесс с дискретными состояниями называется марковским, если все вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от того, в каком состоянии этот процесс находится в настоящий момент, и не зависят от того, каким образом этот процесс протекал в прошлом. Это позволяет предсказать будущее для марковского процесса, гораздо проще, чем для других процессов. В этом случае мы имеем дело с процессом без последствия, или простой цепью Маркова. Не надо понимать марковское свойство как полную независимость будущего от прошлого. Будущее для марковского процесса зависит от прошлого, но только через настоящее [2]. Любой процесс можно считать марковским, если все параметры из «прошлого» включить в «настоящее». Например, пусть для системы S значимо из какого состояния S_1 или S_2 она пришла в состояние S_3, такой процесс нельзя считать марковским. Для того, чтобы процесс можно было считать марковским необходимо ввести дополнительное состояние S_4, в которое включить все параметры состояния S_1, а в состояние S_3 включить параметры состояния S_2.

Например, по ленте, состоящей из пяти клеток, обозначим их S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, случайным образом перемещается фишка. Фишка в начале эксперимента находится на средней клетке S_3, и перемещается на соседнюю клетку по правилу: если при подбрасывании монеты выпадет герб (Г), то фишка перемещается вправо (номер клетки увеличивается на единицу), и влево, если выпадет решка (Р). Если фишка находится на крайней клетке, то остается на ней независимо от выпадения герба или решки. Такой случайный процесс называется марковским, так как следующее положение фишки при очередном подбрасывании монеты зависит только от ее настоящего состояния и не зависит от прошлых состояний.

Еще один пример процесса без последействия. Бросается монета в условные моменты времени $t = 0, 1, \ldots$ и на каждом шаге игрок может выиграть ± 1 с одинаковой вероятностью 0,5. В момент t его суммарный выигрыш есть случайная величина $\xi(t)$. При условии, что $\xi(t) = k$, на следующем шаге выигрыш будет равен $\xi(t+1) = k \pm 1$. Переход из состояния $\xi(t) = k$ в состояние $\xi(t+1) = k + 1$ или $\xi(t+1) = k - 1$ не зависит от того, как ранее было достигнуто состояние $\xi(t) = k$.

2.2. Классификация марковских процессов

Простейшая классификация марковских случайных процессов производится «по состояниям» и «по времени», то есть в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции X(t) и параметра t. Различают следующие основные виды марковских процессов [2]:

- с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские последовательности);
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

2.3. Марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем

Рассмотрим марковские процессы с дискретными состояниями S_1, S_2, ..., S_m, и дискретным временем, то есть марковские цепи. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным, но счетным. Переходы системы из состояния в состояние в марковских цепях возможны только в строго определенные, заранее фиксированные моменты времени. В промежутки времени между этими моментами система S сохраняет свое состояние.

Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого графа состояний (рис. 2.1), где квадратами обозначены состояния Si системы S, а стрелками — возможные переходы из состояния в состояние.

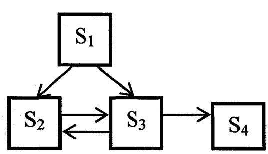

Рис. 2.1. Граф переходов системы

На рис. 2.1 показан граф, имеющий четыре возможных состояния.

Состояние может быть:

источником, система может выйти из этого состояния, но попасть в него обратно уже не может (состояние S_1 на рис. 2.1);

поглощающим, система может попасть в это состояние, но выйти из него уже не может (состояние S_4);

транзитивным, система может войти в это состояние и выйти из него (S_2, S_3).

Если возле каждой стрелки указывается соответствующая вероятность перехода, то такой граф состояний системы называется размеченным (рис. 2.2).

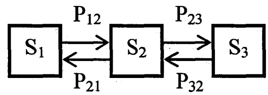

Рис. 2.2. Размеченный граф переходов системы
с тремя состояниями

Возможные задержки в прежнем состоянии изображают обратной стрелкой (петлей), то есть стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Все вероятности p_{ii} легко определить, и поэтому проставлять обратные стрелки на графе мы не будем.

2.4. Моделирование эволюции систем по схеме марковских цепей с дискретным временем

Цель моделирования: определить вероятности состояний системы после i-го шага. Понятия состояния системы и перехода из одного состояния в другое являются основными для марковских процессов. Состояние системы – это характеристика системы на данный момент ее функционирования, совокупность значений характерных для данной системы величин, называемых параметрами состояния.

Считаем, что система может находиться в одном из несовместимых состояний конечного пространства возможных состояний U. Из всех возможных состояний выделяем множество $G = \{S\}$ таких состояний, которые различаются по конечному результату деятельности системы. Множество G назовем фазовым пространством состояний системы. Состояния S_1, S_2, …, S_m могут описываться количественно или качественно (обозначаться словами).

Пример 2.1. Рассмотрим состояния, в которых может находиться магистрант:

S_1 – магистрант не получает стипендию;

S_2 – магистрант получает стипендию;

S_3 – магистрант отчислен.

Состояние магистранта может меняться после сессии раз в семестре, все переходы, произошедшие в течение семестра, условно относим к началу этапа. Этап в примере – семестр, а время – номер семестра.

Пример 2.2. Состояния предприятия:

S_1 – результаты деятельности хорошие;

S_2 – результаты деятельности удовлетворительные;

S_3 – неудовлетворительные результаты деятельности.

В зависимости от решаемых задач выбираются различные фазовые пространства состояний, размерность и свойства пространства зависят от выбранной расчетной схемы. Например, экономическая система в процессе своего функционирования может переходить из одного состояния в другое в зависимости от случайных внешних и внутренних воздействий (событий) B(t). Единицей влияния на эволюцию системы является событие. Такие события, как прогресс в технологиях, изменение спроса, изменение цен на ресурсы, новые методы управления, изменения на рынке и т.д. могут поменять состояние системы.

Сами события вероятностями не обладают, но с ними связаны вероятности перехода. Если переход системы возможен только в соседние состояния то процессы, протекающие в фазовом пространстве состояний G, организованы по схеме деградации и восстановления. В биологии, теории надежности, теории массового обслуживания подобные процессы называются процессами гибели и размножения. Последовательность состояний S_i, $t_i \geq t_1$, можно рассматривать как траекторию случайного процесса, а движение системы (изменение ее параметров) можно трактовать как процесс блуждания системы по множеству состояний S. В результате конкретизируется случайный процесс, описывающий эволюцию системы во времени. Движение системы – это некая абстракция, описывающая изменение ее состояние.

В экономических расчетах для описания эволюции системы удобно использовать процесс с дискретным временем, так как параметры экономических систем фиксируются и измеряются, как правило, в дискретные моменты времени. Дискретные процессы удобны и для моделирования на ЭВМ.

Пусть имеется экономическая система *S* с дискретными состояниями S_1, S_2, … S_m и дискретным временем t_1, t_2, … , t_n. В качестве аргумента, от которого зависит процесс, можно принять не время t, а номер шага 1, 2, ..., n.

Считаем, что случайные переходы системы из состояния в состояние могут происходить в начале этапа. Эти моменты называются шагами процесса, время между двумя соседними шагами называется этапом.

Длина этапа t_1 назначается с учетом следующих условий:

• на длине этапа система при переходе в соседнее состояние должна успеть сделать этот переход, то есть должна быть проведена основная работа по решению возникшей проблемы, связанной с реализацией события (отсутствие последействия);

• вероятность появления нескольких событий на этапе должна быть малой величиной, которой можно пренебречь (ординарность потока).

Первое условие ограничивает минимальное значение длительности этапа t_{1min}, второе условие ограничивает максимальную длительность этапа t_{1max}. Если время этапа, определенное по первому условию, окажется больше длительности этапа, определенное по второму условию $t_{1min} > t_{1max}$, то длину этапа принимают в соответствии с первым условием то есть равной t_{1min}. Длину этапа допускается увеличивать для согласования с отчетными периодами, принятыми на предприятии (месяц, квартал, год). При значительном увеличении t_1 необходимо вносить корректировки в расчеты, связанные с возрастанием вероятности нескольких реализаций одного воздействия B_i на длине этапа. От длины этапа зависят величины условных вероятностей перехода проекта из одного состояния в другое.

Для описания случайного процесса, протекающего в системе с дискретными состояниями, пользуются вероятностями состояний $P_1(k)$, $P_2(k),\ldots, P_m(k)$, где $P_i(k)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ – вероятность того, что на этапе k система находится в состоянии S_i $(i=1,2,\ldots,m)$.

Вероятности P_i (k) удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(k) = 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим определение вероятностей состояния системы с помощью марковского процесса с дискретными состояниями и дискретным временем. Марковская цепь задается вектор-строкой вероятностей начальных «стартовых» состояний системы

$$P_{<m>}(0) = < P_1(0), P_2(0),\ldots, P_m(0) > \qquad (2)$$

и матрицами переходных вероятностей (прил. 1)

$$\Pi(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \ldots & p_{1m}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \ldots & p_{2m}(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m1}(k) & p_{m2}(k) & \ldots & p_{mm}(k) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

Все элементы квадратной матрицы размером $m \times m$ положительные числа от 0 до 1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы (S_i), а ее элемент p_{ij} равен вероятности перехода системы за один шаг из выбранного состояния S_i в состояние S_j. Сумма элементов строки равна единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий. По главной диагонали матрицы стоят вероятности задержки системы (p_{11}, p_{22}, p_{33} и т.д.) Матрицы, обладающие указанными свойствами, называются стохастическими.

На стадии проектирования расчеты эволюции системы выполняют на основе расчетных схем, в которых используются статистические данные. При отсутствии или недостаточности статистических данных используют экспертные оценки. Для задания начального состояния существуют два способа: детерминированный (неслучайный) и случайный. В первом способе из каких-либо соображений (требований к системе, условий эксплуатации) выбирается одно начальное состояние, вероятность которого равна единице. Во втором способе на основе наблюдений устанавливаются вероятности стартовых состояний $P_i(0)$, $i = 1,\ldots, m$. Очевидно, если одна из вероятностей будет равна единице, то остальные будут равны нулю, и случайный способ задания начальных вероятностей переходит в детерминированный.

Переходные вероятности могут быть как неизменными на всех шагах, в этом случае марковская цепь называется однородной, так и переменными. Все переходные вероятности являются условными, так как каждая из них связана с переходом из одного определенного состояния в другое. Переходную вероятность можно определить по формуле $p_{ij} = \lambda_{ij}\Delta t$.

Вероятности состояний системы на первом шаге определяются как произведение вектор-строки начальных вероятностей на матрицу перехода

$$P_{<m>}(1) = < P_1(0), P_2(0),\ldots, P_m(0) > \begin{bmatrix} p_{11}(1) & p_{12}(1) & \ldots & p_{1m}(1) \\ p_{21}(1) & p_{22}(1) & \ldots & p_{2m}(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m1}(1) & p_{m2}(1) & \ldots & p_{mm}(1) \end{bmatrix} =$$

$$< P_1(1), P_2(1),\ldots, P_m(1) >. \tag{4}$$

Напомним правило перемножения вектор-строки на квадратную матрицу. Произведением будет вектор-строка, элементы которой равны сумме попарных произведений элементов вектор-строки, на соответствующие элементы столбца квадратной матрицы (прил. 1)

$$P_1(1) = P_1(0)\, p_{11} + P_2(0)\, p_{21} + \ldots + P_m(0)\, p_{m1};$$

$$P_2(1) = P_1(0)\, p_{12} + P_2(0)\, p_{22} + \ldots + P_m(0)\, p_{m2};$$

$$\ldots$$

$$P_m(1) = P_1(0)\, p_{1m} + P_2(0)\, p_{2m} + \ldots + P_m(0)\, p_{mm}.$$

Вероятности состояний системы на k-ом шаге

$$P_{<m>}(k) = P_{<m>}(k\text{-}1)\, \Pi(k). \qquad (5)$$

Выражение (5) для произвольной размерности вектора и матрицы называется уравнением Колмогорова – Чемпена. Эти уравнения относятся к классу так называемых рекуррентных соотношений, позволяющих вычислить вероятности состояний марковского случайного процесса на любом шаге при наличии информации о предшествующих состояниях.

Алгоритм моделирования по схеме марковских цепей:

– выбрать исследуемое свойство системы;
– определить число возможных состояний системы;
– составить граф состояний;
– определить начальные состояния;
– определить матрицу вероятностей переходов;
– определить искомые вероятности состояний системы.

Пример 2.3. Определение вероятности нахождения завода в состояниях: S_1 – высокий спрос, S_2 – низкий спрос на продукцию.

Завод, выпускающий пылесосы, каждый год меняет модель. В зависимости от того, выпускается удачная или неудачная модель, с точки зрения покупателей, завод может находиться в одном из двух состояний: состояние S_1 – высокий спрос, состояние S_2 – низкий спрос. В результате наблюдений за работой завода установлено, что в следующем году вероятность сохранить высокий спрос (состояние S_1) равна 0,6, а вероятность падения спроса (изменения состояние с S_1 на S_2) равна 0,4. Если покупатели сочтут модель пылесоса неудачной, то вероятность остаться в плохом состоянии S_2 равна 0,8, а вероятность изменить состояние с S_2 на S_1 равна 0,2. Число этапов (лет) принимает значения n = 0, 1, 2, …, 10. Определить вероятности состояний завода для двух вариантов: *а*) начальное состояние завода - S_1 (высокий спрос); *б*) начальное состояние - S_2 (низкий спрос).

Решение для высокого начального спроса (варианта *а*). Вектор-строка вероятностей начальных «стартовых» состояний завода

$$P_{<2>}(0) = <1, 0>,$$

матрица вероятностей переходов

$$\Pi(k) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots 10).$$

Граф состояний завода представлен на рис. 2.3

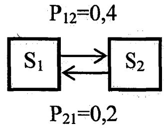

Рис. 2.3 Граф состояний завода: состояние S_1 – высокий спрос на пылесосы, S_2 – низкий спрос.

Вероятности состояний завода на первом шаге

$$P_{<2>}(1) = P_{<m>}(0)\,П(1) = <1,\,0> \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} = <0{,}6,\,0{,}4>,$$

на втором шаге

$$P_{<2>}(1) = P_{<m>}(0)\,П(1) = <1,\,0> \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} = <0{,}6,\,0{,}4>,$$

и т. д.

Для варианта «высокий начальный спрос» результаты расчета вероятностей состояний завода приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вероятности состояний инвестиционного проекта

Этап	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1	1	0,6	0,44	0,38	0,35	0,34	0,34	0,33	0,33	0,33	0,33
P_2	0	0,4	0,56	0,62	0,65	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67	0,67

Из таблицы видно, что вероятность высокого спроса на пылесосы с течением времени (с возрастанием номера этапа) быстро падает. Вероятность нахождения завода в «плохом» состоянии S_2 высока. После шестого этапа вероятности состояний завода стабилизируются и в последующем не изменяются. Это так называемый стационарный режим функционирования, а установившиеся вероятности, называются финальными вероятностями состояний.

Для варианта *б*, низкого начального спроса $P_{<2>}(0) = <0,\,1>$ результаты расчета вероятностей состояний завода приведены в табл. 2.2. Из таблицы видно, что вероятность высокого спроса на пылесосы для всех этапов мала, соответственно вероятность нахождения завода в «плохом» состоянии S_2 очень высока. Финальные вероятности состояний завода для варианта *а* и *б* одинаковы. Следовательно, после некоторого числа переходов (этапов) вероятности состояний становятся независимыми от начального состояния завода.

Таблица 2.2

Вероятности состояний инвестиционного проекта

Этап	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1		0,2	0,28	0,31	0,32	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33
P_2	1	0,8	0,72	0,69	0,68	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67

Пример 2.4. Определение вероятности состояний инвестиционного проекта.

Использование метода марковских цепей рассмотрим на иллюстративном примере. Прогнозируемый период проекта состоит из десяти годовых этапов ($n = 10$), проект может находиться в трёх состояниях: хорошем (S_1); удовлетворительном (S_2) и плохом, неэффективном (S_3) (Рис. 1). Начальное состояние проекта – удовлетворительное, то есть вектор начальных состояние проекта задан

$$P_{<3>}(0) = <0, 1, 0>.$$

В качестве внешних и внутренних возмущений рассматриваем риски производственной, инвестиционной, операционной и финансовой деятельностей. Переходам проекта в худшее состояние способствует реализация неучтенных рисков, переходы в лучшее состояние обуславливаются проведением восстановительных, антирисковых мероприятий. Матрица переходных вероятностей одинакова на всех этапах

$$\Pi(k) = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, 10),$$

где $P_{11} = 0{,}7$ – вероятность того, что проект останется в «хорошем» состоянии (S_1);

$P_{12} = 0{,}3$ — вероятность перехода проекта из состояния «хорошее» в состояние «удовлетворительное»; $P_{13} = 0{,}0$ — вероятность перехода проекта из состояния «хорошее» в состояние «плохое»;

строка $P_{21} = 0{,}5$, $P_{22} = 0{,}2$, $P_{23} = 0{,}3$ — вероятности перехода проекта из состояния «удовлетворительное» в состояния: «хорошее», «удовлетворительное» и «плохое»;

строка $P_{31} = 0$, $P_{32} = 0{,}5$, $P_{33} = 0{,}5$ — вероятности перехода проекта из состояния «плохое» в состояния: «хорошее», «удовлетворительное» и «плохое».

Решение. Вероятности состояний инвестиционного проекта после первого шага

$$P_{<3>}(1) = <0,1,0> \begin{bmatrix} 0,70 & 0,30 & 0,00 \\ 0,50 & 0,20 & 0,30 \\ 0,00 & 0,50 & 0,50 \end{bmatrix} = <0.5, 0.2, 0.3>.$$

Вероятности состояний системы после второго шага

$$P_{<3>}(2) = < 0.5, 0.2, 0.3 > \begin{bmatrix} 0,70 & 0,30 & 0,00 \\ 0,50 & 0,20 & 0,30 \\ 0,00 & 0,50 & 0,50 \end{bmatrix} = <0.45, 0.34, 0.21>,$$

$$P_{<3>}(3) = < 0.45, 0.34, 0.21 > \begin{bmatrix} 0,70 & 0,30 & 0,00 \\ 0,50 & 0,20 & 0,30 \\ 0,00 & 0,50 & 0,50 \end{bmatrix} =< 0.48, 0.31, 0.21 >$$

и т. д.

Результаты расчета вероятностей состояний проекта на всех этапах представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Вероятности состояний инвестиционного проекта

Этап	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1	0	0,50	0,45	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,51
P_2	1	0,20	0,34	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31
P_3	0	0,30	0,21	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	0,18	0,18	0,18

Результаты расчета показывают, что вероятность нахождения проекта в «плохом» состоянии S_3 очень высока, от 0,3 на первом этапе и до 0,18 на последних этапах. После шести этапов устанавливаются финальные вероятности состояний.

2.5. Модели гибели и размножения

Если переходы системы осуществляются лишь между соседними состояниями (см. рис. 2.4), то такая схема случайного процесса называется схемой гибели и размножения, а сам процесс – процессом гибели и размножения.

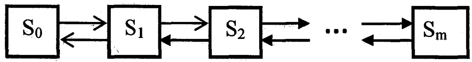

Рис. 2.4. Неразмеченный граф переходов системы

Случайные процессы организованные по данной схеме встречаются очень часто, например, процессы, протекающие в системах массового обслуживания. Для упрощения модели (уменьшения числа состояний) во многих процессах целесообразно учитывать переходы лишь между соседними состояниями. Термин «процесс гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где такими процессами описываются изменения численности биологических популяций.

Пример 2.5. Определить вероятности состояний измерительной лаборатории, осуществляющей высокоточные измерения. В лаборатории установлены три одинаковых измерительных микроскопа. Их проверяют каждые четыре месяца. Каждый из микроскопов на любом этапе может быть исправным или неисправным, если микроскоп неисправен, его ремонтируют. Отказ и ремонт микроскопа может произойти в любое время, но мы считаем, что смена состояний происходит в начале этапа. Состояния лаборатории могут быть пронумерованы по числу неисправных микроскопов (рис. 2.5):

S_0 – в лаборатории нет неисправных микроскопов;

S_1 – в лаборатории один микроскоп неисправен;

S_2 – в лаборатории два микроскопа неисправны;

S_3 – в лаборатории неисправны все три микроскопа.

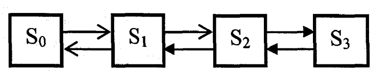

Рис. 2.5. Граф состояний лаборатории.

Матрица вероятностей перехода имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} 1-p_н & p_н & 0 & 0 \\ p_р & 1-p_н-p_р & p_н & 0 \\ 0 & p_р & 1-p_н-p_р & p_н \\ 0 & 0 & p_р & 1-p_р \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

где $p_н = 0,3$ – вероятность появления на этапе неисправности в микроскопе, $p_р = 0,5$ – вероятность окончания ремонта на этапе.
Вектор-строка вероятностей начальных «стартовых» состояний

$$P_{<4>}(0) = < 0,7; 0,2; 0,1; 0 >.$$

Результаты расчета приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Этап	Вероятности состояний лаборатории			
	P_1	P_2	P_3	P_4
0	0,7	0,2	0,1	0
1	0,59	0,3	0,08	0,03
2	0,563	0,277	0,121	0,039
3	0,5326	0,2848	0,1268	0,0558
4	0,5152	0,2801	0,1387	0,0659
5	0,5007	0,2799	0,1447	0,0746
6	0,4905	0,2786	0,1502	0,0807
7	0,4826	0,278	0,154	0,0854
8	0,4768	0,2774	0,157	0,0889
9	0,4725	0,277	0,159	0,0915
10	0,4692	0,2766	0,1607	0,0935

2.6. Стационарный режим для цепи Маркова

В некоторых системах со временем устанавливается стационарный режим, во время которого система меняет свои состояния, но средняя доля времени, которую система проводит в различных состояниях, не меняется. То есть вероятности этих состояний не зависят от номера шага. Такие вероятности называются предельными (или финальными) вероятностями цепи Маркова. В примере 3 стационарный режим наступает практически на шестом этапе. В примере показано так же, что после шести переходов (этапов) вероятности состояний становятся независимыми от начального состояния завода.

Сформулируем условия существования стационарного режима для системы S с конечным числом состояний, в которой протекает марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем:

1. Множество всех состояний системы должно быть связанным.
2. Цепь Маркова должна быть однородной.
3. Цепь Маркова должна быть «достаточно хорошо перемешиваемой» (не должна быть «циклической»).

Цепи Маркова, отвечающие этим условиям, будем называть эргодическими цепями Маркова.

Первое условие означает, что при блуждании системы по своим состояниям она рано или поздно попадет в любое состояние, выйдет из него и вновь в него вернется.

Второе условие означает, что переходные вероятности должны быть постоянными (одинаковыми) на всех этапах.

Третье условие означает, что необходимо, чтобы моменты попадания в отдельные состояния или в группы состояний не образовывали циклов (периодов).

Если все условия существования стационарного режима выполняются, то финальные вероятности не зависят от того, каково было состояние системы или каковым было распределение вероятностей в начальный момент.

Если условия существования финальных вероятностей выполнены, то для стационарного режима искомые вероятности состояний P_1, P_2, …, P_m не изменяются при переходе системы от одного этапа к другому

$$P_i(k) = P_i(k+1) \tag{6}$$

или

$$< P_1, P_2 > \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = < P_1, P_2 >. \tag{7}$$

Отсюда получим систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений

$$P_1 = P_1\, p_{11} + P_2\, p_{21},$$

$$P_2 = P_1\, p_{12} + P_2\, p_{22}.$$

Как известно, такая система уравнений имеет бесчисленное множество решений. В рассматриваемом случае решение становится единственным, если добавить к системе из двух линейных однородных алгебраических уравнений нормировочное условие

$$P_1 + P_2 = 1,$$

взамен которого можно удалить из системы любое уравнение, например второе, тогда получим два неоднородных линейных уравнения с двумя неизвестными

$$P_1 = P_1\, p_{11} + P_2\, p_{21};$$

$$P_1 + P_2 = 1.$$

Такая система имеет единственное решение

$$P_1 = p_{21} / (p_{21} + p_{12}), \tag{8}$$

$$P_2 = 1 - P_1. \tag{9}$$

Финальную вероятность можно истолковать:

- как среднюю долю времени, которую в стационарном режиме проводит система в состоянии S_i $(i = 1, 2)$;
- как вероятность застать систему в состоянии S_i $(i = 1, 2)$, если мы посмотрим на нее в случайный момент времени.

Если число состояний системы равно m, то система линейных однородных алгебраических уравнений с m неизвестными будет иметь следующий вид

$$P_1 = P_1 p_{11} + P_2 p_{21} + \ldots + P_m p_{m1};$$

$$P_2 = P_1 p_{12} + P_2 p_{22} + \ldots + P_m p_{m2};$$

$$\ldots$$

$$P_m = P_1 p_{1m} + P_2 p_{2m} + \ldots + P_m p_{mm}.$$

Добавив к системе уравнений нормировочное условие

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_m = 1$$

и взамен удалив одно любое уравнение, получим систему m неоднородных линейных уравнений, имеющих единственное решение для $P_1, P_2, \ldots P_m$.

Пример 2.6. Задана матрица переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Найти финальные вероятности для системы.

Решение. $P_1 = p_{21} / (p_{21} + p_{12}) = 0{,}2 / (0{,}2 + 0{,}4) = 0{,}33$,

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 = 0{,}67.$$

2.7. Управляемые марковские цепи

Марковские цепи называются управляемыми, если имеется возможность до определенной степени управлять законами распределения или параметрами переходных вероятностей [4]. В качестве примера такого процесса можно привести любое производство, у которого вероятность получения эффекта может зависеть от рекламы, мероприятий по улучшению качества, выбора рынка сбыта и т.д.

Рассмотрим марковскую цепь, в которой каждый переход сопровождается доходом или убытком. Величина генерируемого денежного потока зависит от состояния, в котором находится экономическая система. Очевидно, что в благополучном состоянии генерируется больший денежный поток, чем в неблагополучном состоянии. Кроме этого переход системы из одного состояния в другое, вызванный возникновением ущерба или его компенсацией, сопровождается потерей части денежных средств. Для определения прогнозируемого денежного потока в случае марковского процесса с дискретным временем дадим вероятностям перехода p_{ij} оценку d_{ij}, являющуюся прогнозным значением денежного потока, генерируемого предприятием на данном этапе при переходе из состояния S_i в состояние S_j. Сумма значений денежных потоков на всех переходах рассматриваемого этапа определяет денежный поток на данном этапе

$$CF_{<m>}(i) = P_{(m)}(i-1)\begin{bmatrix} p_{11}d_{11} & p_{12}d_{12} & \dots & p_{1m}d_{1m} \\ p_{21}d_{21} & p_{22}d_{22} & \dots & p_{2m}d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}d_{m1} & p_{m2}d_{m2} & \dots & p_{mm}d_{mm} \end{bmatrix} =$$

$$< CF_1(i), CF_2(i),\dots, CF_m(i) > \quad (i = 1,\dots, n), \tag{10}$$

где $CF_{<m>}(i)$ – вектор значений денежного потока на i-том этапе.

Значения p_{ij} и d_{ij} могут быть как постоянными на всех этапах, так и переменными, что является более реалистичным.

Среднее значение денежного дохода на i-том этапе

$$M[CF\ (i)] = CF_1(i) + CF_2(i) +,\dots,+CF_m\ (i). \tag{11}$$

Дисконтированный доход (важнейший показатель эффективности предприятия) рассчитывается по формуле

$$M[Д]=\sum_{i=1}^{n}\frac{M[CF(i)]}{(1+z_i)^i}, \tag{12}$$

где z_i – безрисковая норма дисконта на i-том шаге; $n=t_n/t_1$ - число рассматриваемых шагов в прогнозном периоде; t_n, t_1 – время прогнозного периода и длительность шага расчета.

На величину дохода влияет выбранное управление. Назовем решение, принимаемое в конкретный момент, частным управлением. Тогда управление есть последовательность частных решений в моменты i = 1, 2, ..., n. Управление системой заключается в выборе на каждом шаге и в каждом состоянии стратегии, которой соответствуют строки матрицы переходных вероятностей

$$p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{im})$$

и строки матрицы доходов

$$d_i = (d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{im})$$

определяющие эффективность предприятия.

Модель оценки эффективности предприятия на основе цепей Маркова, учитывающая переходы предприятия из одного состояния в другое, создает необходимую базу в более обоснованном выборе стратегии.

Пример 2.7. Определим чистый дисконтированный доход инвестиционного проекта.

Чистый дисконтированный доход (Net Present Value, NPV) - это текущая стоимость денежных потоков инвестиционного проекта, с учетом ставки дисконтирования, за вычетом инвестиций. Суть показателя состоит в сравнении текущей стоимости будущих поступлений от реализации проекта с инвестиционными вложениями в проект.

Дано: объём капиталовложений - 70 условных единиц, безрисковая норма дисконта – 12%, прогнозируемый период проекта состоит из десяти годовых этапов (n = 10), проект может находиться в трёх состояниях: хорошем (S_1); удовлетворительном (S_2) и плохом, неэффективном (S_3) (Рис. 1). Начальное состояние проекта – удовлетворительное, то есть вектор начальных состояние проекта задан

$$P_{<3>}(0) = < 0, 1, 0 >.$$

В качестве внешних и внутренних возмущений рассматриваем риски производственной, инвестиционной, операционной и финансовой деятельностей. Переходы проекта в худшее состояние способствует реализация неучтенных рисков, переходы в лучшее состояние обуславливаются проведением антирисковых, восстановительных мероприятий. Матрица переходных вероятностей одинакова на всех этапах

$$\Pi(k) = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, 10).$$

Исходные значения взяты условными, пример имеет лишь учебно-методическую цель.

Решение. Инвестиционный проект может генерировать денежный поток в 60 условных единиц в состоянии S_1, 45 в состоянии S_2 и -10 в состоянии S_3. Ущерб от реализации риска и затраты на восстановительные мероприятия равны 55 условным единицам. Ущерб и затраты относим к началу этапа. Тогда матрица денежных потоков будет иметь следующий вид

$$d(k)=\begin{bmatrix} 60 & -10 & 0 \\ 5.0 & 45 & -65 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \quad (k=1,\ldots,10).$$

Результаты расчета приведены в табл. 2.5 и 2.6 и на рис. 2.6.

Таблица 2.5

Вероятности состояний инвестиционного проекта

Этап/ Состояние	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_1	0	0,50	0,45	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,51
S_2	1	0,20	0,34	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31
S_3	0	0,30	0,21	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	0,18	0,18	0,18

Таблица 2.6

Дисконтированный доход проекта на этапах.

Этап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доход, у.е.	-7,1	11,9	9,06	9,14	8,40	7,68	6,94	6,24	5,60	5,01

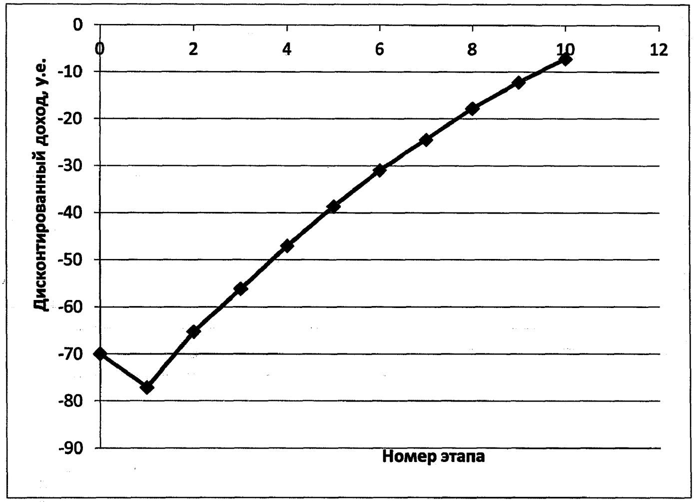

Рис. 2.6. Формирование чистого дисконтированного дохода проекта

Чистый дисконтированный доход проекта отрицательный (–7,20 у. е.). Отрицательное значение чистого дисконтированного дохода показывает, какие убытки потерпит инвестор в результате реализации проекта. Следовательно, проект отклоняется.

Пример 2.8. Управление устойчивостью инвестиционного проекта.

Используя возможности метода марковских цепей, наметим пути повышения доходности и устойчивости инвестиционного проекта, рассмотренного ранее в примере 2, назовем его проект А.

Объём капиталовложений примем равным 70 условным единицам. Безрисковая норма дисконта – 12%, предельно допустимая вероятность нахождения проекта в неэффективном состоянии $P_k^* = 0{,}1$ на всех этапах, область допустимых значений чистого дисконтированного дохода (область цели) $W \geq 0$. Прогнозируемый период проекта состоит из десяти годовых этапов ($n = 10$), проект может находиться в трёх состояниях: хорошем (S_1); удовлетворительном (S_2) и плохом, неэффективном (S_3) (Рис. 1). Начальное состояние проекта – удовлетворительное, то есть вектор начальных состояние проекта задан

$$P_{<3>}(0) = < 0,\ 1,\ 0 >.$$

В качестве внешних и внутренних возмущений рассматриваем риски производственной, инвестиционной, операционной и финансовой деятельностей. Переходы проекта в худшее состояние способствует реализация неучтенных рисков, переходы в лучшее состояние обуславливаются проведением антирисковых, восстановительных мероприятий. Матрица переходных вероятностей одинакова на всех этапах

$$\Pi(k) = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, 10).$$

Лицо, принимающее решение, никогда не будет располагать всеобъемлющей оценкой состояния внешней и внутренней среды проекта, в то же время оно должно прилагать усилия по повышению уровня своей осведомленности, стремиться установить логическую связь параметров среды проекта с его устойчивостью.

Объективно существующая неопределенность внешних и внутренних воздействий обуславливает отклонения достигнутых параметров проекта от плановых. Анализ прогнозируемой устойчивости связан с рассмотрением ожидаемых движений проекта при различных возмущениях. Движение проекта – это некая абстракция, описывающая изменение его состояний. От состояния проекта зависят значения выходных величин. Объективная и точная оценка экономической устойчивости проекта является необходимым элементом процесса управления.

Под устойчивостью в широком смысле понимают способность системы возвращаться в состояние равновесия после того, как она была из этого состояния выведена под влиянием внешних или/и внутренних возмущающих воздействий. Понятие «состояние равновесия» является основополагающим в теории устойчивости. Таким образом, устойчивость предполагает сохранение параметров процесса. Понятие «состояние равновесия», в котором система остается сколь угодно долго неприменимо к инвестиционным проектам. Развивающиеся системы, к которым относятся и инвестиционные проекты, обладают рядом особых свойств, в числе которых неравновесность системы, стремление использовать свою энергию не для поддержания стабильности, а для роста и развития.

За выходной параметр примем денежный поток, отражающий движение денежных средств инвестиционного проекта. Денежный поток проекта представляет собой совокупность распределенных по отдельным интервалам рассматриваемого периода времени поступлений и выплат денежных средств, генерируемых его деятельностью. Изменчивость, нестабильность ожидаемых денежных потоков элементарных проектов обуславливается рисками операционной, инвестиционной и финансовой деятельности. Денежный поток инвестиционного проекта в течение прогнозируемого отрезка времени (расчетного периода) представляет собой случайный процесс, аргументом которого служит время.

Под экономической устойчивостью в вероятностном аспекте понимается свойство проекта при случайных возмущениях достигать намеченных целей, незначительно отклоняясь от «невозмущённой» траектории. В теории устойчивости «невозмущенным» называют заданное, исходное движение. Если проект таким свойством не обладает, он называется неустойчивым. Неустойчивость является основной причиной деградации проекта.

Признаками устойчивости являются:

нахождение проекта на каждом шаге расчета в эффективных состояниях (вероятность нахождения проекта в неэффективном состоянии должна быть малой величиной, которой можно пренебречь);

попадание значения наращенного за прогнозный период дохода проекта в область цели.

То есть считаем, что проект экономически устойчив, если выполняются два условия:

$$P_{Sm}(k) \langle P_k^* \qquad k=1, \dots, n, \tag{13}$$

$$M[ЧДД] \in W, \tag{14}$$

где $P_{Sm}(k)$ – вероятность нахождения проекта в неэффективном состоянии на этапе k; P_k^* – допустимая вероятность нахождения проекта в неэффективном состоянии; $M[ЧДД]$ – среднее значение чистого дисконтированного дохода; W – область допустимых значений наращенного дохода предприятия за прогнозный период (область цели).

Выполнение первого условия (13) свидетельствует о локальной устойчивости проекта на этапах, выполнение второго условия (14) – об устойчивости относительно цели.

Напомним, что инвестиционный проект А может генерировать денежный поток в 60 условных единиц в состоянии S_1, 45 в состоянии S_2 и –10 в состоянии S_3. Ущерб от реализации риска и затраты на восстановительные мероприятия равны 55 условным единицам. Ущерб и затраты относим к началу этапа. Тогда матрица денежных потоков будет иметь следующий вид

$$d(k) = \begin{bmatrix} 60 & -10 & 0 \\ 5.0 & 45 & -65 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \quad (k = 1, \dots, 10).$$

Результаты расчета проекта А приведены в табл. 2.7 и 2.8.

Полученные результаты показывают, что проект А неустойчив, так как вероятность нахождения проекта в неэффективном состоянии S_3 больше предельно допустимой величины $P_k^* = 0,1$, чистый дисконтированный доход проекта отрицательный (–7,20 у. е.).

Таблица 2.7

Вероятности состояний инвестиционного проекта А

Этап/ Состояние	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_1	0	0,50	0,45	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,51
S_2	1	0,20	0,34	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31
S_3	0	0,30	0,21	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	0,18	0,18	0,18

Таблица 2.8

Дисконтированный доход проекта А на этапах.

Этап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доход, у.е.	-7,1	11,9	9,06	9,14	8,40	7,68	6,94	6,24	5,60	5,01

Управление устойчивостью заключается в выборе и реализации мероприятий изменяющих:

вектор строку начальных состояние проекта;

строки матрицы переходных вероятностей;

строки матрицы доходов.

Поиск мероприятий, обеспечивающих их изменение является одной из основных задач управления проектом.

Значения строк матриц зависят от уровня затрат на дособытийные и послесобытийные мероприятия. Дособытийные мероприятия планируются и осуществляются заблаговременно, они направлены на снижение вероятности реализации риска и уменьшение размера возможного ущерба. Послесобытийные мероприятия осуществляются после возникновения ущерба и направлены на скорейшую ликвидацию неблагоприятных последствий.

Для повышения устойчивости проекта предлагается провести дополнительные исследования на прединвестиционной и на инвестиционной фазах с целью улучшить начальное состояние проекта до «хорошего». Дополнительные исследования требуют увеличения объёма капиталовложений на 10 условных единиц, объем требуемых капиталовложений увеличится и станет равным 80 условным единицам. В результате вектор начальных состояний модернизированного проекта, назовем его проектом Б, примет вид

$$P_{<3>}(0) = < 1, 0, 0 >.$$

Результаты расчета с новыми исходными данными (проект Б) приведены в табл. 2.9 и 2.10 и на рис. 2.7.

Таблица 2.9

Вероятности состояний инвестиционного проекта В

Этап/ Состояние	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_1	1	0,70	0,64	0,58	0,55	0,54	0,53	0,51	0,52	0,51	0,51
S_2	0	0,30	0,27	0,29	0,30	0,30	0,30	0,31	0,30	0,31	0,31
S_3	0	0,00	0,09	0,13	0,15	0,16	0,17	0,18	0,18	0,18	0,18

Таблица 2.10

Дисконтированный доход проекта В на этапах.

Этап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доход, у.е.	34,8	19,9	15,6	12,2	10,1	8,53	7,39	6,48	5,72	5,07

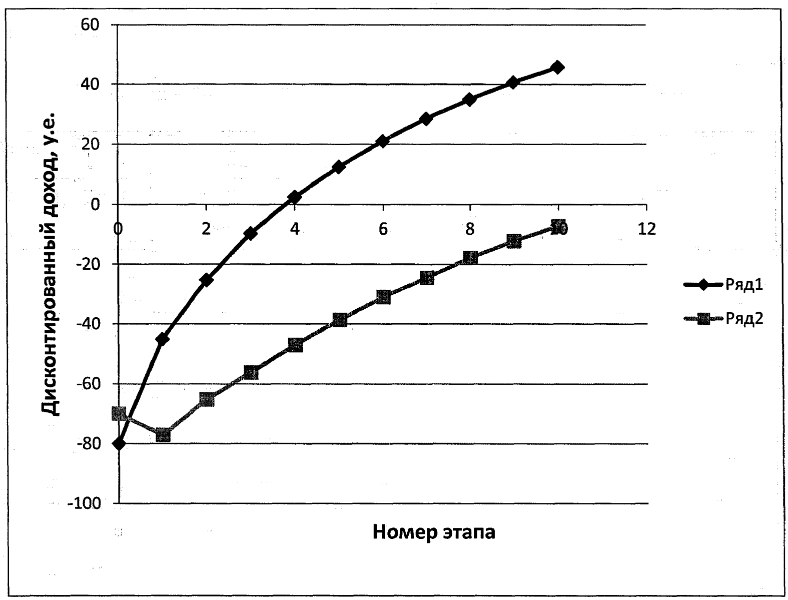

Рис. 2.7. Формирование чистого дисконтированного дохода проекта А (ряд 2) и проекта В (ряд1)

Несмотря на высокие показатели эффективности, проект в предложенном виде неосуществим, т. к. начиная с третьего шага вероятность нахождения проекта в неэффективном состоянии больше допустимой, что свидетельствует о локальной неустойчивости проекта. То есть проект В остается неустойчивым.

В проекте С для обеспечения устойчивость предлагается вместо проведения дополнительных прединвестиционных исследований модернизировать службу риска, сделать менеджмент риска более эффективным. При этом дополнительные расходы возрастут на 10 у. е. на каждом этапе. Результаты расчета с новыми исходными данными (проект С) приведены в табл. 2.11 и 2.12 и на рис. 2.8.

Таблица 2.11

Вероятности состояний инвестиционного проекта С

Этап/ Состояние	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_1	0	0,6	0,66	0,70	0,71	0,72	0,72	0,72	0,72	0,72	0,72
S_2	1	0,3	0,28	0,26	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
S_3	0	0,1	0,06	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03

Таблица 2.12

Дисконтированный доход проекта С на этапах.

Этап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доход, у.е.	4,5	19,6	19,6	18,5	16,9	15,3	13,7	12,2	10,9	9,8

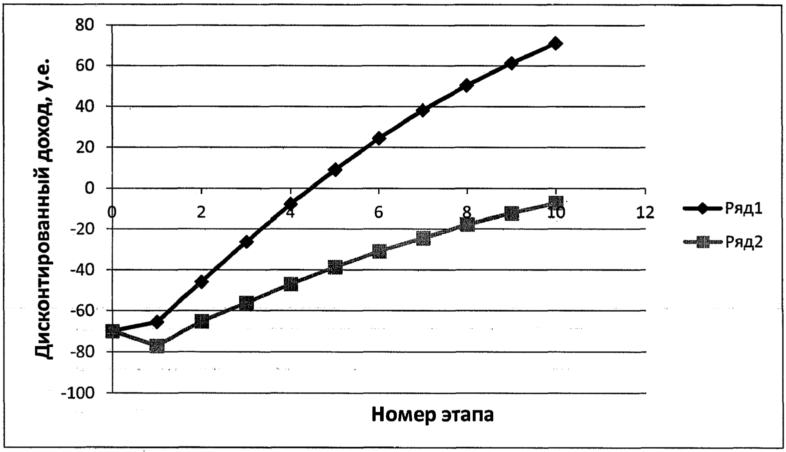

Рис. 2.8. Формирование чистого дисконтированного дохода проекта А (ряд 2) и проекта С (ряд1).

Вероятность нахождения проекта в неэффективном состоянии меньше допустимой, что свидетельствует о локальной устойчивости проекта на этапах, положительный чистый дисконтированный доход говорит об устойчивости относительно цели. То есть результаты расчета показывают, что проект С устойчив.

3. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

3.1. Потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим через какие-то, вообще говоря, случайные интервалы времени (поток заявок на обслуживание, поток автомашин, подъезжающих к магазину, поток отказов оборудования и т. п.). Сами события в потоке вероятностью не обладают. Не имеет смысла приписывать вероятность подъехавшей к магазину машине, но с потоком событий можно связывать различные случайные события, например, событие А = {в течение времени от 11часов до 11 часов 10 минут к магазину подъедет ровно 5 машин} или В = { в течение 10 минут к магазину не подъедет ни одной машины}. Зная характеристики потока можно определить вероятности событий этих событий.

Существует большое число различных видов случайных потоков. В теории марковских процессов большое значение имеют пуассоновские потоки событий. Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами ординарности, отсутствия последействия и стационарности.

Свойство ординарности проявляется в том, что события в нем появляются поодиночке, а не парами, тройками и т. д. Под интенсивностью ординарного потока событий в момент t понимают

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{m(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \tag{3.1}$$

где $m(t, t + \Delta t)$ – среднее число событий на временном интервале $(t, t + \Delta t)$. Интенсивность потока событий $\lambda(t)$ – это среднее число событий, приходящееся в единицу времени, например, в месяц и, как правило, является малым числом. Размерность интенсивность потока [1/время].

Отсутствие последействия — это свойство потока, которое состоит в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени.

Свойство стационарности проявляется в том, что вероятностные характеристики потока не меняются со временем ($\lambda(t) = \lambda = \mathrm{const}$). В стационарном потоке могут наблюдаться какие-то случайные сгущения и разряжения событий, но среднее число событий, приходящееся на единицу времени, постоянно.

Если поток ординарен, без последействия и стационарен, то число событий k, попадающих на участок времени τ, имеют распределение Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$

$$P(k) = a^k e^{-a} / k! \qquad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{3.2}$$

Для нестационарного пуассоновского потока параметр a зависит не только от длины участка τ, но и от того, где этот участок расположен

$$a = a(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt.$$

Полагая в формуле (3.2) число событий k = 0, получим вероятность того, что на участке длиной t не произошло ни одного события

$$P(0) = e^{-\lambda t}. \tag{3.3}$$

Если учесть, что обычно $\lambda t < 1/10$, то формула (3.3) для вероятности функционирования системы без событий упрощается в результате разложения в ряд и отбрасывания малых членов

$$P(0) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \dots \approx 1 - \lambda t. \tag{3.4}$$

Функция распределения случайной величины T – интервала между соседними событиями в простейшем потоке

$$F(t) = 1 - P(0) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (t > 0). \tag{3.5}$$

Дифференцируя (3.5), получим плотность распределения интервала времени между соседними событиями

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0). \tag{3.6}$$

Это распределение называется показательным (экспоненциальным) распределением. Для случайной величины T, имеющей показательное распределение, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $m_T = \sigma_T = 1/\lambda$.

3.2. Описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем

Многие процессы протекающие в экономических системах с некоторыми допущениями можно считать марковскими цепями с непрерывным временем. Процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния можно заранее перечислить, процесс называется процессом с непрерывным временем, если переходы системы из состояния в состояние могут осуществляться в случайные моменты времени. Случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется марковским, если для любого момента времени все вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от того, в каком состоянии этот процесс находится в настоящий момент, и не зависят от того, каким образом этот процесс протекал в прошлом. Рассматривая марковские цепи, полагаем, что моменты переходов системы из состояния в состояние образуют простейший поток событий. Принимаем, что переход происходит «скачком», практически мгновенно. Интенсивности переходов для всех пар состояний считаем заданными, на графе состояний их удобно проставлять над стрелками (рис. 3.1).

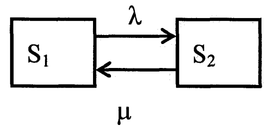

Рис. 3.1 Размеченный граф состояний системы

Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система S будет находиться в состоянии S_i ($i = 1, 2, ..., m$). Аппарат марковских цепей позволяет определить для любого t вероятности состояний $P_1(t)$, $P_2(t)$, … $P_m(t)$. Определение вероятности состояний системы разберем на примере эволюции системы, которая может находиться в одном из двух состояний S_1 и S_2. Рассмотрим одну из вероятностей состояний, например $P_1(t)$. Это вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S_1. Придадим t малое приращение Δt и найдем $P_1(t + \Delta t)$ — вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет в состоянии S_1. Это может произойти двумя способами: либо в момент t система уже была в состоянии S_1, а за время Δt не вышла из него; либо в момент t система была в состоянии S_2, а за время Δt перешла из него в S_1. Найдем вероятность первого варианта. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S_1, равна $P_1(t)$. Эту вероятность нужно умножить на вероятность того, что, находившись в момент t в состоянии S_1, система за время Δt не перейдет из него в S_2. Вероятность первого варианта равна $P_1(t)[1 - \lambda\Delta t]$. Вероятность второго варианта равна вероятности того, что в момент t система будет в состоянии S_2, а за время Δt перейдет из него в состояние S_1. Вероятность этого факта равна $P_2(t)\mu\Delta t$. Складывая вероятности обоих вариантов (по правилу сложения вероятностей), получим:

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t)[1 - \lambda\Delta t] + P_2(t)\mu\Delta t.$$

Раскроем квадратные скобки, перенесем $p_1(t)$ в левую часть и разделим обе части на Δt:

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -P_1(t)\lambda + P_2(t)\mu.$$

Устремляя Δt к нулю, слева в уравнении получим в пределе производную функции $P_1(t)$. Таким образом, запишем дифференциальное уравнение для $P_1(t)$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -P_1(t)\lambda + P_2(t)\mu.$$

Аналогично, напишем дифференциальное уравнение для $P_2(t)$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -P_2(t)\mu + P_1(t)\lambda.$$

Объединяя уравнения (5 и 6), получим систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний (уравнения Колмогорова):

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -P_1(t)\lambda + P_2(t)\mu, \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= -P_2(t)\mu + P_1(t)\lambda. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Это — система двух линейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

Сформулируем общее мнемоническое правило составления уравнений Колмогорова по графу состояний: *производная вероятности i-го состояния равна сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го) состояния.*

Систему дифференциальных уравнений (3.7) решают при начальных условиях, задающих вероятности состояний в начальный момент $P_1(0)$, $P_2(0)$. Уравнения (3.7) однородны (не имеют свободного члена) и, значит, определяют неизвестные только с точностью до произвольного множителя. Решить систему можно с помощью, так называемого нормировочного условия $P_1(t) + P_2(t) = 1$. При этом одно (любое) из уравнений можно отбросить (оно вытекает как следствие из остальных).

Выразим $P_2(t)$ через $P_1(t)$ и подставим в первое из уравнений (7), а второе отбросим. Получится одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией $P_1(t)$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -P_1(t)\lambda + [1 - P_1(t)]\mu$$

преобразуя его, получим

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + [\lambda + \mu]P_1(t) = \mu.$$

Решение уравнения при начальном условии $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = 0$.

$$P_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t},$$

следовательно

$$P_2(t) = 1 - P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}].$$

Во многих случаях процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго. При $t \to \infty$ в системе, независимо от начального состояния, устанавливается стационарный режим, для которого вероятности $P_1(t)$ и $P_2(t)$ не зависят от времени и равны

$$P_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$
$$P_2 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \quad (3.8)$$

Финальные вероятности состояний (если они существуют) могут быть получены решением системы линейных алгебраических уравнений. Они получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если положить в них левые части (производные равными нулю) и заменить одно из них нормировочным уравнением

$$-P_1(t)\lambda + P_2(t)\mu = 0,$$
$$P_1(t) + P_2(t) = 1. \quad (3.9)$$

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое, то финальные вероятности существуют.

Пример 3.1. Рассмотрим процесс работы станка. Поток отказов станка – простейший с интенсивностью $\lambda_1 = 0{,}001$ [1/час]. Отказавший станок ожидает начала ремонта. Время ожидания распределено по показательному закону с параметром $\lambda_2 = 0{,}1$ [1/час]. Время ремонта станка распределено по показательному закону с параметром $\lambda_3 = 0{,}01$ [1/час]. Найти финальные вероятности состояний станка.

Решение. Станок может находиться в состояниях:

S_1 – станок исправен,

S_2 – станок ожидает ремонта,

S_3 – станок ремонтируется.

Размеченный граф состояний приведен на рис. 3.2.

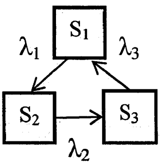

Рис. 3.2. Размеченный граф состояний станка

Финальные вероятности состояний находим по графу, согласно приведенному мнемоническому правилу:

$$P_3\,\lambda_3 = P_1\,\lambda_1;$$

$$P_1\,\lambda_1 = P_2\,\lambda_2;$$

$$P_2\,\lambda_2 = P_3\,\lambda_3;$$

Из этих уравнений любое (например, первое) можно отбросить и заменить нормировочным $P_1 + P_2 + P_3 = 1$. В результате преобразований получим:

$$P_1 = \lambda_2\,\lambda_3 /(\,\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_3 + \lambda_2\,\lambda_3) = 0{,}90,$$

$$P_2 = \lambda_1\,\lambda_3 /(\,\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_3 + \lambda_2\,\lambda_3) = 0{,}01,$$

$$P_3 = \lambda_1\,\lambda_2 /(\,\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_3 + \lambda_2\,\lambda_3) = 0{,}09,$$

т. е. в стационарном режиме станок в среднем 90% времени будет находиться в работоспособном состоянии S_1, 1% времени — в состоянии S_2 (ожидание начала ремонта) и 9% —в состоянии S_3 (в состоянии ремонта). Знание этих финальных вероятностей может помочь оценить среднюю эффективность работы системы и загрузку ремонтных органов.

Задачи

Задача 1. В цепи Маркова с двумя состояниями S_1 и S_2 и начальным состоянием S_1, найти вероятности состояний через два шага, если $p_{12}=1/4$, $p_{21}=1/5$.

Задача 2. Производится многократное бросание погнутой монеты. Пусть вероятность выпадения орла для такой монеты равна 0,55, соответственно решки 0,45. Определяет ли последовательность исходов бросаний погнутой монеты цепь Маркова.

Задача 3. Ежегодно проводится осмотр кондиционера. После каждого шага (момента осмотра и ремонта) кондиционер может оказаться в одном из следующих состояний: S_0 – кондиционер полностью исправен, S_1 – имеются незначительные неисправности, позволяющие его эксплуатировать, S_2 – кондиционер полностью вышел из строя.

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\Pi(k) = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Постройте граф состояний. Найдите вероятности состояний кондиционера после одного, двух, трех осмотров, если в начале (при $t = 0$) кондиционер был полностью исправен.

Задача 4. Два игрока играют в игру «орел или решка». При каждом бросании монеты один игрок выигрывает, а другой проигрывает одну тысячу рублей. Вероятность выигрыша или проигрыша равна 0,5. Каждый игрок до начала игры имеет по три тысячи рублей. После проигрыша одного из игроков игра заканчивается. Перечислите возможные состояния одного из игроков и изобразите размеченный граф его состояний.

Задача 5. Техническое устройство имеет два возможных состояния: S_1 – исправное; S_2 – неисправное. Неисправное устройство направляется на ремонт. Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Постройте граф состояний. Найдите финальные вероятности для технического устройства.

Задача 6. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени t = 0 определяется вектором <0, 1, 0>. Найдите распределение по состояниям в момент времени t = 1, 2, 3.

Задача 7. По виду матрицы переходных вероятностей восстановить недостающие вероятности

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Недостающие вероятности обозначены звёздочкой – *.

Задача 8. На участке имеется два сверлильных станка — А и Б, каждый из которых может в ходе работы отказать (выйти из строя). Перечислите возможные состояния участка и постройте граф состояний.

Задача 9. Размеченный граф состояний системы S имеет вид, показанный на рис.

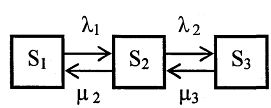

Рис. Граф состояний системы

Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова и начальные условия для решения системы, если известно, что в начальный момент система находилась в состоянии S_2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование экономических процессов с помощью цепей Маркова является эффективным методом исследования в менеджменте. В пособии приведены примеры марковских моделей. Аппарат управляемых цепей Маркова создает необходимую базу для исследования эволюции экономических систем во времени, дает менеджеру богатейший материал для повышения качества управленческих решений, позволяет оценить устойчивость экономических систем.

У читателя может возникнуть вполне естественный вопрос: почему в пособии рассматривалась только простая однородная цепь Маркова с конечным числом состояний и непрерывным временем. Ответ таков, эта модель достаточно проста, а моделируемые ситуации понятны на уровне здравого смысла. Она вполне подходит для первоначального изучения моделирования случайных процессов.

К тому же от моделей требуется не безмерное, а адекватное цели исследования отражение реальности, что вполне обеспечивает данный тип марковского процесса. Магистрантам, заинтересованным в более глубоком познании предмета, можно порекомендовать познакомиться с более специальной литературой [4].

ГЛОССАРИЙ

Анализ – 1) мысленное или реальное разделение целого на части (например, химический анализ вещества, декомпозиция глобальной цели и т. д.); 2) до недавнего времени - синоним научного исследования вообще ("подвергнуть анализу" означало "изучить"); 3) метод познания, основанный на мысленном или реальном разделении целого на части. Познание не сводится к анализу; только в сочетании, переплетении, единстве с синтезом становится возможным познание реальности.

Вероятность перехода – вероятность перехода системы (элемента) из одного состояния в другое.

Вход (системы) – 1) связь системы с окружающей средой, направленная от среды в систему, т.е. выражающая воздействия из среды на систему; 2) то, что преобразуется системой в выход.

Выход (системы) – 1) связь системы с окружающей средой, выражающая воздействие системы на среду и направленная от системы к среде; 2) продукт системы; то, во что преобразуются входы; может иметь как реальный характер (например, материальная продукция), так и абстрактный (например, удовлетворение потребности.

Гипотеза – предположительное и предварительное представление об изучаемом предмете исследования, основанное на ранее полученных сведениях или знании и необходимое для первого шага в изучении явления. Для некоторых видов исследования гипотеза может быть их конечным результатом.

Декомпозиция – разделение целого на части по критериям функционального вхождения части в целое.

Исследование – вид познавательной деятельности человека, направленной на получение информации, новых знаний, позволяющих вскрыть суть и содержание явлений, определить закономерности, тенденции их развития, определить возможности использования знаний в практической деятельности человека, в практике управления.

Качество исследования – комплексная совокупность свойств и характеристик исследования, отражающая его особенность и позволяющая оценить его результативность.

Классификация – прием, посредством которого из некоторого множества объектов выделяются все входящие в него классы таким образом, чтобы каждый принадлежащий исходному множеству объект попал в один и только в один класс.

Концепция – комплекс ключевых положений, достаточно полно, целостно и всесторонне раскрывающих сущность, содержание и особенности исследуемого явления, его существование в действительности или проявление в практической деятельности человека.

Концепция исследования – комплекс ключевых положений методологического характера, определяющих подход к исследованию и организации его проведения.

Критерий достижения цели – количественный показатель, определяющий меру или степень оценки достижения цели по сравнению с другими возможными вариантами (альтернативами). Критерий всегда имеет количественную оценку и направлен, в зависимости от показателя, на минимизацию или максимизацию состояния системы. Например, минимум затрат на производство продукции, максимум валовой прибыли, минимальная текучесть рабочих кадров, максимальная выработка и др.

Менеджер – лицо, принимающее управленческие решения в системе социально-экономического управления (в отличие от системы административного, бюрократического, военизированного управления, где социальная принадлежность и экономические интересы не играют существенной роли).

Метод – совокупность приемов и способов сбора, обработки и анализа эмпирической социологической информации.

Метод исследования – способ изучения явлений, который выбирается в соответствии с особенностями предмета исследования, возможностью и эффективностью его использования в конкретных условиях.

Методика – организационный документ, основанный на совокупности методов, приемов целесообразного проведения какой-либо работы.

Методология – 1) систем принципов научного исследования;

2) совокупность исследовательских процедур, техники и методов;

3) логическая организация исследования, предполагающая осознание его цели, распознавание проблем, являющихся предметом исследования, выбор средств и методов исследования, определение рациональной

последовательности исследовательской деятельности.

Методология исследования – логическая организация исследования, предполагающая осознание его цели, распознавание проблем, являющихся предметом исследования, выбор средств и методов исследования, определение рациональной последовательности исследовательской деятельности.

Моделирование – исследование явлений, процессов на основе построения и изучения их моделей.

Модель – образ (мысленный или условный) какого-либо объекта, процесса или явления, отражающий существенные свойства моделируемого объекта с точки зрения исследования.

Модель динамическая – модель, отображающая процессы, происходящие в системе со временем; в частности, модели функционирования и развития.

Модель математическая – абстрактная или знаковая модель, построенная средствами математики (например, в виде системы уравнений .графа, логической формулы и т.п.).

Начальное состояние – состояние системы в начальный момент времени.

Неопределенность — неоднозначность любого происхождения в описании системы.

Неопределенность стохастическая – неопределенность, описываемая распределением вероятностей на множестве возможных состояний рассматриваемого объекта; случайность.

Объект исследования – область социальной реальности, на которую направлен познавательный интерес исследователя. Среда, в которой проявляется проблема.

Окружающая среда – то, что находится вне границ системы и взаимодействует с нею. Структурированность окружающей среды может выражаться с различной степенью подробности; как минимум – в виде входов и выходов системы.

Оптимальный – наилучший в заданных условиях. Качество оценивается с помощью критерия оптимальности, а условия задаются в виде ограничений на дополнительные критерии. Оптимизация – центральная идея кибернетики.

Опыт – основанное на практике знание действительности, накопленные навыки деятельности.

Параметр – величина, значение которой определяется постоянным в пределах решаемой задачи.

Переход – изменение одного состояния системы (элемента) на другое.

Подход – наиболее удачная грань для «вхождения» в проблему, начальная позиция, отправная точка исследования, ограничение проблематики исследования (методологический подход и пр.).

Подход к исследованию – исходная позиция исследователя, определяющая выбор средств и методов исследования, пути и организацию его проведения.

Показатели – качественные и количественные характеристики изучаемых социальных объектов, явлений, процессов, отражающих их структуру или динамику развития.

Предмет исследования – наиболее значимые с практической или теоретической точки зрения свойства, стороны, особенности объекта, которые подлежат непосредственному изучению, конкретная проблема, разрешение которой требует проведения исследования.

Принятие решения – целевой выбор на множестве альтернатив. Методы принятия решений разнообразны в зависимости от типа неопределенности и других условий выбора.

Проблема – противоречие, несоответствие желаемого и фактического состояния системы, требующее разрешения.

Проблемная ситуация – 1) возникающее в процессе развития противоречие между потребностями индивида, группы, организации и возможностями для их удовлетворения; 2) состояние в развитии социального объекта, характеризующееся несоответствием его функционирования потребностям дальнейшего развития.

Процесс исследования – последовательность этапов его осуществления, комбинация и последовательность различных операций и процедур, выбор и сочетание приоритетов.

Результат исследования – в зависимости от целей и вида исследования: комплекс научных положений, объясняющих то или иное явление; конкретные рекомендации по преобразованию системы управления; разрешение обострившихся противоречий, комплекс нововведений, обусловленных тенденциями развития; методика выполнения какой-либо работы.

Ресурсы исследования – комплекс средств и возможностей, обеспечивающих успешное проведение исследования и достижение его результатов.

Свойства – отличительные признаки предмета или явления, отражающие его сущность, содержание и особенности.

Синтез – метод изучения объекта исследования во взаимосвязи его составных частей.

Система – средство достижения цели; основные особенности систем: целостность, относительная обособленность от окружающей среды, наличие связей со средой, наличие частей и связей между ними (структурированность), подчиненность всей организации системы некоторой цели.

Системный анализ – с практической стороны системный анализ есть система методов исследования или проектирования сложных систем, поиска, планирования и реализации изменений, предназначенных для ликвидации проблем; с методологической стороны системный анализ является прикладной диалектикой, так как реализует идеи материалистической диалектики применительно к конкретным практическим задачам, особенность которых состоит в необходимости выяснения причин их сложности и устранения этих причин; с методической стороны системный анализ отличается междисциплинарным и наддисциплинарным характером и вовлечением в работу как неформальных, эвристических, экспертных методов, так и эмпирических, экспериментальных методов, а также при возможности и необходимости - строгих формальных математических методов.

Системный подход — в настоящее время рассматривается либо как одна из ранних форм системного анализа, либо как начальная фаза современного системного анализа, этап первоначального, качественного анализа проблемы и постановки задач.

Состояние системы – характеристика системы на данный момент ее функционирования, совокупность значений характерных для данной системы величин, наз. параметрами состояния.

Факт – сделанное, совершившееся, существующее - это событие или явление действительное, реально существующее, все то, что произошло на самом деле и имеет тому убедительное подтверждение, это реальность, которая является очевидной и которую невозможно отрицать.

Характеристики – совокупность фактов, отражающих содержание, состояние или изменения того или иного явления.

Цель – это идеальное, мысленное предвосхищение результата деятельности человека. Цель является непосредственным мотивом, направляющим и регулирующим человеческую деятельность. Содержание цели зависит от объективных законов действительности, разных возможностей человека и применяемых средств для достижения цели.

Цель исследования – планируемый результат, на достижение которого направлено исследование.

Элемент – предел членения системы в рамках данного качества.

Эффективность исследования – соотношение использованных ресурсов на проведение исследования и результатов полученных от него.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антонов, А.В. Системный анализ: учеб. для вузов / А.В. Антонов. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 454 с.

2. Венцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 384 с.

3. Волкова, В.Н. Теория систем: учеб. пособие/ В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – М.: Высш. шк., 2006. – 511 с.

4. Соколов, Г.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике / Г.А. Соколов, Н.А. Чистякова – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 248 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Умножение вектор-строки на матрицу

Матрицей $m \times n$ называется прямоугольный массив чисел, состоящий из m строк и n столбцов. Количество строк и столбцов определяет размер матрицы. В расчетах марковских цепей необходимо определять произведение вектор-строки на квадратную матрицу. Для обозначения матриц мы будем использовать заглавные буквы.

Пример квадратной матрицы П размером 4×4

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}.$$

Элемент матрицы П обозначается p_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца. Если в матрице только одна строка, то она называется матрицей-строкой или вектор-строкой. Пример вектор-строки А размером 1×4

$$A = < P_1, P_2, P_3, P_4 >$$

Для элементов вектора-строки необходим только один индекс.

Умножение матриц покажем на примерах. Умножим матрицу (вектор-строку) А размером 1×2

$$A = <0.6, 0.4>$$

на квадратную матрицу П размером 2×2

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить произведение вектор-строки на квадратную матрицу необходимо, чтобы количество элементов в вектор-строке было равно количеству строк матрицы. В нашем случае это условие выполняется, то есть произведение матриц определено.

Правило умножения матриц легко запомнить фразой «*строка умножается на столбец*»: вектор-строка сначала умножается на первый столбец матрицы, а затем на второй. Произведением вектор-строки на матрицу будет вектор-строка. Для нахождения j-того элемента вектор-строки С нужно умножить каждый элемент вектора-строки В на соответствующий ему по порядку элемент j-того столбца матрицы П и просуммировать эти произведения

$$C=A\times\Pi=<0.6,\ 0.4>\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\0.8 & 0.2\end{bmatrix}=<0.6\times0.7+0.4\times0.8,\ 0.6\times0.3+0.4\times0.2> =$$

$$=<0.74,\ 0.26>.$$

Первый элемент матрицы

$$C_1 = 0.6\times0.7+0.4\times0.8 = 0{,}74,$$

второй элемент матрицы

$$C_2 = 0.6\times0.3+0.4\times0.2 = 0{,}26.$$

Следует обратить внимание, что умножение вектор-строки на матрицу некоммутативно, то есть $B\times\Pi \neq \Pi\times B$.

Умножение матриц более высокого размера выполняется аналогично

$$< P_1(0), P_2(0),\dots, P_m(0) > \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm}\end{bmatrix} = < P_1(1), P_2(1),\dots, P_m(1) >.$$

Произведением будет вектор-строка, элементы которой равны сумме попарных произведений элементов вектор-строки, на соответствующие элементы столбца квадратной матрицы

$$P_1(1) = P_1(0)\, p_{11} + P_2(0)\, p_{21} + \dots + P_m(0)\, p_{m1};$$

$$P_2(1) = P_1(0)\, p_{12} + P_2(0)\, p_{22} + \dots + P_m(0)\, p_{m2};$$

$$\dots$$

$$P_m(1) = P_1(0)\, p_{1m} + P_2(0)\, p_{2m} + \dots + P_m(0)\, p_{mm}.$$

Перемножить матрицы можно в программе Microsoft Excel или при помощи математического онлайн калькулятора.

Приложение 2

Андрей Андреевич Марков

Андрей Андреевич Марков (1856 – 1922гг.) родился в Рязани. Он был сыном чиновника Андрея Григорьевича Маркова, служившего в Лесном департаменте в чине коллежского советника, а затем вышедшего в отставку и работавшего частным поверенным, успешно занимался адвокатской практикой. Андрюша Марков был болезненным ребенком. Он страдал туберкулезом коленного сустава. Когда Андрюше было 10 лет, ему сделали операцию. Известный хирург разогнул ему ногу, и он получил возможность ходить нормально. Правда, он потом, всю жизнь, слегка прихрамывал, но это не помешало ему стать хорошим пешеходом, любителем дальних прогулок. "Будешь жив, пока на ходу", – любил он говорить.

Среднее образование А.А. Марков получил в гимназии. Он не был в числе лучших учеников, напротив, из гимназии неоднократно поступали жалобы на его неудачи по всем предметам за исключением математики. В последних классах самому Маркову занятия были настолько тягостны, что он подумывал о переходе в техническое учебное заведение. Особенно досаждали ему древние языки.

Андрей действительно был очень увлечен математикой еще в школьный период и изучал эту науку самостоятельно. Одно время ему казалось, что он изобрел новый метод интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Об этом своем открытии он сообщил известным русским математикам того времени: Буняковскому, Золотареву и Коркину. Из них первый ничего не ответил на письмо гимназиста Маркова, а два других подробно и обстоятельно разъяснили ему, что этот способ в действительности не является новым. Так завязалось знакомство Андрея Андреевича с профессорами Петербургского университета А.Н. Коркиным и Е.И. Золотаревым.

В восемнадцать лет А.А. Марков окончил гимназию и поступил в Петербургский университет. В это время там читал лекции великий математик П.Л. Чебышев. Влияние Чебышева на молодого студента оказалось решающим. Университет Марков закончил в 1878 г. В том же году он был награжден золотой медалью за сочинение на предложенную факультетом тему "Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей" и был оставлен при университете "для приготовления к профессорскому званию". Через два года после этого он защитил магистерскую диссертацию и начал преподавать в петербургском университете, сначала в качестве приват-доцента, а с 1886 г. в качестве профессора. В 1884 г. Марков защитил докторскую диссертацию "О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей", посвященную непрерывным дробям, в которой доказал и обобщил некоторые неравенства Чебышева, опубликованные ранее без доказательств.

Уже через восемь лет после опубликования Марковым первой научной работы его научные заслуги были настолько велики, что по предложению П.Л. Чебышева Академия наук избрала его в 1886 г. адъюнктом; через четыре года экстраординарным академиком, а еще через шесть лет ординарным академиком. Дальнейшая жизнь Маркова целиком была посвящена науке.

В цикле работ, опубликованном в 1906 – 1912 гг., Марков заложил основы одной из общих схем естественных процессов, которые можно изучать методами математического анализа. Впоследствии эта схема была названа цепями Маркова и привела к развитию нового раздела теории вероятностей - теории случайных процессов. В качестве примера случайных процессов можно назвать диффузию газов, химические реакции, лавинные процессы и т. д. Важное место в творчестве Маркова занимают вопросы математической статистики. Он вывел принцип, эквивалентный понятиям несмещенных и эффективных статистик, которые получили теперь широкое применение.

Прошло уже много десятилетий со дня смерти Андрея Андреевича Маркова. Но его идеи и результаты – знаменитые "марковские цепи", доказательство закона больших чисел, теоремы о минимумах квадратичных форм и другие блестящие достижения – вошли в основной фонд науки, и будут жить века.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 24.12.2015. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 3,25. Тираж 30 экз. Заказ 874/213.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.